

## 因子分析を付加した意味構造分析

能 登 宏

### 目 次

1. はじめに
2. 意味構造分析
  - 2-1 質問事項と質問形式
  - 2-2 意味構造分析法
3. 因子分析
  - 3-1 概 要
  - 3-2 因子分析模型
  - 3-3 因子分析模型の行列による表現
  - 3-4 因子分析模型の因子解
  - 3-5 主因子法による解き方
  - 3-6 共通因子軸の回転
  - 3-7 因子分析計算の手順
4. 因子分析を付加した意味構造分析
  - 4-1 因子分析の結果
  - 4-2 共通因子への属性の付与
  - 4-3 意味構造グラフに於ける共通因子軸の導入
  - 4-4 因子分析によって再構成された意味構造グラフの評価
  - 4-5 共通因子の寄与と共通性
5. おわりに

### 1. はじめに

文献 1) では、評定尺度法を用いた質問紙調査を行ない、意味構造分析を試みた。この分析では、調査項目群（標識群）の中のすべての 2 標識間に算定される「順序係数」に基いて意味構造グラフを作成し、調査

対象に対する被験者の評定について、被験者の関心の動向に着目して検討を加えた。意味構造グラフとは縦軸に評定平均値をとり、各標識が有する評定平均値に従って標識を配置し、任意の 2 標識間に順序係数によって定義される「順序関連」が成立していれば、当該 2 標識間に順序関連の矢印を記入することによって、調査対象を評価するにあたって被験者に形成される心理的有向階層構造を図示したものである。

この場合、横軸は意味構造グラフが見易くなるように標識を配置したこと以上のことの意味は持つていなかった。しかし横軸に、意味構造分析の枠組の中で取扱う尺度とは相補的な基準に従って標識を配置出来れば、調査対象の評価に関する被験者の心理的モーメントの多元的把握が可能となる。

本稿では、相関行列に因子分析を行なって抽出される共通因子を意味構造グラフの横軸に配置し、各標識に対して決定される特徴的な因子構造に従って標識を振分けることによって、意味構造グラフの 2 次元表現に根拠を与えることが出来ることを示す。このようにして視覚化された意味構造グラフは、調査項目群（標識群）に関する評定を通じて、調査対象の個別的事象に対する被験者の関心の動向の背後に隠んでいる、より基本的な共通因子の間の被験者の心理的モーメントを捉えることが出来る。

調査事例としては文献 1 ) で使用した、1989年度『プログラミング論 I』の科目を履習した本学経済学部経営情報学科 1 年次 2 組 (A, B) の学生 77 名を対象に実施した、「当該授業一般」にわたる質問紙調査を再び取上げる。

## 2. 意味構造分析

意味構造分析に関する詳しい説明は文献 2 ), 1 ) でなされている。この節では、次節以降で必要とされる最小限の意味構造分析に関する内容について述べる。

### 2 - 1 質問事項と質問形式

文献 1 ) では 1989 年度に実施した質問紙調査全体が取上げられている

## 因子分析を付加した意味構造分析

### プログラミング論Ⅰアンケート（1989年度）

経情学科クラス（ ）学籍番号（ ）名前（ ）

今後の参考にしますので、授業全般に対する印象、授業の内容、プリント、課題、授業の具体的な進め方、パソコンやプログラムにたいする考え方、今後の抱負等について、以下の設問に答えて下さい。

標識  
通番 要素5. 授業の具体的な進め方

- [20] 1) 自分の打鍵速度  
- 2. 非常に遅い - 1. 遅い 0. 普通 1. 速い 2. 非常に速い
- [21] 2) 授業中打鍵時間をもっと確保して欲しい  
- 2. 大いに反対 - 1. 反対 0. 普通 1. 賛成 2. 大いに賛成
- [22] 3) 授業中の打鍵は止めた方が良い  
- 2. 大いに反対 - 1. 反対 0. 普通 1. 賛成 2. 大いに賛成
- [23] 4) 打鍵中に説明されるので理解出来なかった  
- 2. 大いに反対 - 1. 反対 0. 普通 1. 賛成 2. 大いに賛成
- [24] 5) 授業と授業との間に間があるので、パソコンを使用して習得した事を忘れてしまう  
- 2. 大いに反対 - 1. 反対 0. 普通 1. 賛成 2. 大いに賛成
- [25] 6) 授業中にプログラムの事等を友人と議論し合った  
- 2. 大いに反対 - 1. 反対 0. 普通 1. 賛成 2. 大いに賛成
- [26] 7) 授業中の話し合いは有効であった  
- 2. 大いに反対 - 1. 反対 0. 普通 1. 賛成 2. 大いに賛成
- [27] 8) 授業中は話声が多くうるさかった  
- 2. 大いに反対 - 1. 反対 0. 普通 1. 賛成 2. 大いに賛成
- [28] 9) 先生の説明の仕方は妥当である  
- 2. 大いに反対 - 1. 反対 0. 普通 1. 賛成 2. 大いに賛成
- [29] 10) 疑問点や質問は大体授業中に解決出来た  
- 2. 大いに反対 - 1. 反対 0. 普通 1. 賛成 2. 大いに賛成
- [30] 11) 授業にもっと遊ぶ要素があつてもよい  
- 2. 大いに反対 - 1. 反対 0. 普通 1. 賛成 2. 大いに賛成
- [31] 12) 授業では少數のよく分かる人に照準を合わせている  
- 2. 大いに反対 - 1. 反対 0. 普通 1. 賛成 2. 大いに賛成
- [32] 13) 授業のベースに必死でついて行った  
- 2. 大いに反対 - 1. 反対 0. 普通 1. 賛成 2. 大いに賛成

図1 質問紙調査（アンケート）の質問項目と統計処理上付した標識通番

が、本稿では、ここで取扱う調査項目群である要素 5 に関する質問形式と評定尺度についてのみ述べる。要素 5 は「授業の具体的な進め方」についての設問で、13 標識からなっている。図 1 に要素 5 に関する質問項目と評定尺度が示されている。評定尺度は間隔尺度と見なされていて、目盛には、-2, -1, 0, 1, 2 の項目値が付与されている。標識がある事象についての「先進性」「遅延性」に関する量的大小関係を尋ねている場合には、項目値を「非常に大」から「非常に小」までの 5 段階に対応させる。又、標識が命題の形をとっており、その命題に対し「同意」「不同意」の程度を尋ねている場合には、項目値を「大いに反対」から「大いに賛成」までの 5 段階に対応させる。図 1 には各標識に、統計処理上の通し番号（標識通番）が付されている。

## 2-2 意味構造分析法

意味構造分析では、任意の 2 標識について被験者が選択した項目値の間の大小関係に着目して、標識間の「順序関係」を見出す。2 標識  $X$ ,  $Y$  の間の評定に関する順序関係の程度は、順序係数  $\gamma$  によって示される。標識  $X$  から標識  $Y$  への順序係数  $\gamma_{XY}$  は次式によって定義される。

$$\gamma_{XY} = 1 - \frac{1}{f_{XY}(s-1)} \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{i=j+1}^s (x_i - y_j) f_{ij}^{XY} \quad (2-1)$$

ここで  $x_i$ ,  $y_j$  は、それぞれ標識  $X$  の  $i$  番目の項目に付与されている目盛値、標識  $Y$  の  $j$  番目の項目に付与されている目盛値である。 $f_{XY}$  は  $X$  と  $Y$  の同時実測度数、 $s$  は標識に付与されている項目数である。 $f_{ij}^{XY}$  は、標識  $X$  の項目  $i$  と標識  $Y$  の項目  $j$  とが同時に測定される度数（同時頻度）を表わす。右辺第 2 項の 2 重和は、標識  $Y$  の評定値よりも標識  $X$  の評定値を大とする積率（[評定値の差] と [同時頻度] についての積和）を表わす。第 2 項はこの積率の最大値  $f_{XY}(s-1)$  で規格化してある。従って  $\gamma_{XY}$  は、「標識  $X$  の評定値よりも標識  $Y$  の評定値を小と評価しない積率」を係数化したもので、変域は  $0 \leq \gamma_{XY} \leq 1$  である。 $\gamma_{XY} = 1$  は、全ての被験者が標識  $X$  の評定値よりも標識  $Y$  の評定値を小としなかった場合であり、「標識  $X$  から標識  $Y$  への順序が完全に成立している」と言う。 $\gamma_{XY} = 0$  は全ての被験者が標識  $X$  に最大評定値を与えた場合であり、「標識  $X$  から標識  $Y$  への順序が

## 因子分析を付加した意味構造分析

全く成立していない」ことを示す。

2 標識  $X$ ,  $Y$  に関する順序係数には、次のような重要な性質がある。

[定理] 標識  $X$  と標識  $Y$  の評定平均値をそれぞれ  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  とする。このとき

$$\bar{x} < \bar{y} \text{ ならば } r_{xy} > r_{yx}$$

が成立する。

但し、評定平均値  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  は、それぞれ

$$\bar{x} = \frac{1}{f_X} \sum_i f_{ii}^{XX} x_i \quad (X \text{ の評定平均値})$$

$$\bar{y} = \frac{1}{f_Y} \sum_j f_{jj}^{YY} y_j \quad (Y \text{ の評定平均値})$$

$$f_X = \sum_i f_{ii}^{XX} \quad (X \text{ の実測度数})$$

$$f_Y = \sum_j f_{jj}^{YY} \quad (Y \text{ の実測度数})$$

で表わされる。

即ち、 $X$  の評定平均値が  $Y$  の評定平均値より小さいとき、評定平均値小の標識  $X$  から評定平均値大の標識  $Y$  への順序係数  $r_{xy}$  は逆方向の順序係数  $r_{yx}$  よりも大きい。

全ての標識間の順序係数が分かれれば、任意の 2 標識  $X$ ,  $Y$  の間に「順序性」が成立しているかどうかを決定できる。順序性の成否は次のように定める。

2 標識  $X$ ,  $Y$  について  $r_{xy} \geq r_{lim}$  のとき、順序性  $X \subset Y$  が成立し、 $r_{xy} < r_{lim}$  のとき順序性  $X \subset Y$  が成立しない ( $X \not\subset Y$ )。但し  $r_{lim}$  は限界特性順序係数と名づけられ、今の場合、 $r_{lim} = 0.93$  に設定されている。

このとき、標識間の順序関連は次のように定義される。

i)  $X \subset Y$ かつ $Y \not\subset X$ のとき

順序関連  $X \rightarrow Y$  がある。

ii)  $X \not\subset Y$ かつ $Y \subset X$ のとき

順序関連  $Y \rightarrow X$  がある。

iii)  $X \subset Y$ かつ $Y \subset X$ のとき

等価関連  $X \leftrightarrow Y$  がある。

iv)  $X \not\subset Y$ かつ $Y \not\subset X$ のとき

順序関連がない。

同様にして逆順序係数 $\bar{\gamma}$ を定義することができる。

$$\bar{\gamma}_{XY} = -1 - \frac{1}{f_{XY}(s-1)} \sum_{j=2}^s \sum_{i=1}^{j-1} (x_i - y_j) f_{ij}^{XY} \quad (2-2)$$

この式は、標識 $X$ の評定値よりも標識 $Y$ の評定値を大と評価しない積率を係数化しており、変域は $-1 \leq \bar{\gamma}_{XY} \leq 0$ である。 $\bar{\gamma}_{XY} = -1$ は、全ての被験者が、標識 $X$ の定評値よりも標識 $Y$ の評定値を大としなかった場合で、「 $X$ から $Y$ への逆順序が完全に成立している」と言う。 $\bar{\gamma}_{XY} = 0$ は全ての被験者が標識 $X$ に最小評定値を与え、標識 $Y$ に最大評定値を与えた場合で、「 $X$ から $Y$ への逆順序が全く成立していない」ことを示す。 $\gamma$ と $\bar{\gamma}$ との間には次の関係式が成立する。

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{XY} &= -\bar{\gamma}_{YX} \\ \bar{\gamma}_{XY} &= -\bar{\gamma}_{YX} \end{aligned} \quad (2-3)$$

つまり、「 $X$ から $Y$ への順序係数は $Y$ から $X$ への逆順序係数に負号を乗じたものに等しい。」

2 標識 $X$ ,  $Y$ に関する逆順序係数には次の性質がある。

[定理] 標識 $X$ と標識 $Y$ の評定平均値をそれぞれ $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ とする。このとき

$$\bar{x} < \bar{y} \text{ ならば } \bar{\gamma}_{XY} > \bar{\gamma}_{YX}$$

が成立する。

逆順序係数は順序係数と内容的には同値であるが、逆順序係数を導入する利点は、標識 $X$ から標識 $Y$ への「同意的」或は「先進的」順序係数を問題にする代わりに、標識 $Y$ から標識 $X$ への「不同意的」或は「遅延的」逆順序係数を問題にした方が調査結果をより直接的に把握できる場合があるからである。

順序関連の場合と全く同様にして逆順序関連を定義することができる。

意味構造グラフは次のようにして描かれる。まず縦軸に評定平均値をとり、全標識を評定平均値の最も大きい標識から最も小さい標識までを1次元的に並べる。次に全標識間の順序関連に着目して全標識にわたる「同意・不同意」「先進性・遅延性」についての順序関連の矢印を表示

## 因子分析を付加した意味構造分析

する。

意味構造グラフの横軸の設定については第4節で述べる。

### 3. 因子分析

#### 3-1 概 要

因子分析<sup>(3)</sup>は、標識（変量）間の相関行列の内部構造を、可能な限り少數の“共通因子”によって説明しようとするものである。相関行列に有意な相関があれば、第1の仮想的な共通因子を想定し、この因子に由来する共分散を相関行列から取除き第1残差行列を求める。この残差行列にお有意な相関があれば、言換えればまだ“説明し切れない”共分散があれば、第2の仮想的共通因子を想定し、この因子に由来する共分散を先の残差行列から取除き第2残差行列を求める。このような手続きを繰返し、可能な限り少ない共通因子によって変量間の相関行列から有意な相関を除き去る。従って因子分析は、相関行列の内部構造が、それぞれ独立に共分散をもたらす可能な限り少數の共通因子によって規定されるという模型を内包していることが分かる。

因子分析模型に基づいて仮想的な共通因子を求めるには、第1の共通因子から順次、因子寄与が最大となるように因子を定める。即ち、問題にしている共通因子と各標識（変量）との間の共分散（因子構造）の平方和が最大となるように因子を決定する（主因子法）。このようにして、因子解を求めることは因子構造を求ることに帰着する。

主因子法に依って求められた共通因子（又は因子構造）について考察するための有効な方法は、各共通因子を表わす直交軸を設定した共通因子空間内に、因子構造を座標として各標識を点示することである。ところでお通因子の数が1個の場合を除いて因子構造は一義的には決まらない。共通因子軸の組が設定されたとき、それを回転させて得られる因子構造も又、今考えている同じ相関行列に対する因子解となっている。従って共通因子空間での共通因子軸の任意の回転によって得られる因子構造から、調査対象を理解するのに最も都合のよいものを選択することが出来る。因子分析法の応用でよく用いられる共通因子軸の選択は、各共

通因子に対する因子構造を 0 に近い値と絶対値の大きい値とに大別し、共通因子の解釈を容易にしようとするものである (*varimax* 法)。別の言い方をすれば、1 つの標識を可能な限り、因子構造の絶対値が大きい 1 つの共通因子で説明しようとするものである (単純構造)。これを因子構造の単純構造への変換と言う。

### 3 - 2 因子分析模型

対象を調査するにあたって  $p$  個の調査項目 (標識)  $(X_1, X_2, \dots, X_p)$  に対する  $n$  人の被験者の評点を得点列ベクトル  $x_1, x_2, \dots, x_p$  で表わす。便宜のために、調査時における評点を標準得点に換算しておく。標準得点  $z_1, z_2, \dots, z_p$  とは、分散が 1 に規格化されている評点のことと言う：

$$z_{mj} = (x_{mj} - \bar{x}_j) / \sigma_j \quad \begin{matrix} (m = 1, 2, \dots, n) \\ (j = 1, 2, \dots, p) \end{matrix} \quad (3-1)$$

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n x_{mj} \quad (\text{標識 } X_j \text{ の評定平均値}) \quad (3-2)$$

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n (x_{mj} - \bar{x}_j)^2} \quad (\text{標識 } X_j \text{ の標準偏差}) \quad (3-3)$$

実際、標準得点  $z_j$  の分散  $\sigma_j^2$  は  $\sigma_j^2 = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n z_{mj}^2 = 1$  となっている。ここで次のような記法を導入する。

$$(z_i z_j) \equiv \frac{1}{n} \tilde{z}_i \cdot z_j = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n z_{mi} z_{mj} \quad (3-4)$$

$\tilde{z}_i$  は列ベクトル  $z_i$  の転置ベクトルつまり行ベクトルを表わしている。

なお  $(z_i z_j)$  は標識  $X_i$  と  $X_j$  との間の相関係数  $r_{ij}$  に等しい。

$$(z_i z_j) = r_{ij} \quad (3-5)$$

因子分析模型では、測定される変量 (標識) の標準得点  $z_i$  を、調査項目数  $p$  より少ない  $r$  個の共通因子得点  $f_k$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) と  $z_i$  に固有の独自因子得点  $u_i$  の 1 次結合で表わせると仮定する。 $f_k$  と  $u_i$  とは推定量である。

$$z_i = a_{i1} f_1 + a_{i2} f_2 + \dots + a_{ir} f_r + d_i u_i \quad (j = 1, 2, \dots, p) \quad (3-6)$$

### 因子分析を付加した意味構造分析

ここで  $a_{jk}$  は変量  $Z_j (X_j)$  に対する共通因子  $f_k$  の寄与の程度を示すもので、 $j$  番目の変量における  $k$  番目の共通因子の負荷量、又は  $k$  番目の共通因子における  $j$  番目の変量の負荷量と呼ばれる。より一般的には因子構造と呼ばれ、変量  $Z_j$  と因子  $f_k$  との共分散を表わしている。独自因子  $u_i$  は  $p$  個の変量のそれぞれに対応する固有の変動を表わし、係数  $d_i$  の 2 乗 ( $d_i^2$ ) は “独自性” と呼ばれる。

共通因子と独自因子との間には次の 2 つの仮定をおく。

(1)  $f_1, f_2, \dots, f_r$  はすべての独自因子と直交する。

$$(f_k u_i) = 0 \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, r \\ j = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad (3-7)$$

(2) 異なる独自因子は直交する。

$$(u_i u_j) = 0 \quad \begin{cases} i, j = 1, 2, \dots, p \\ (i \neq j) \end{cases} \quad (3-8)$$

更に、

(3) 異なる共通因子間の共分散は 0 とする。

$$(f_k f_l) = 0 \quad \begin{cases} k, l = 1, 2, \dots, r \\ (k \neq l) \end{cases} \quad (3-9)$$

を仮定する。仮定(3)によって得られる因子解を直交解と言う。このとき、因子構造は共通因子負荷量に帰着する。

又、共通因子の分散も、独自因子の分散も 1 に標準化されているとする：

$$(u_i u_j) = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, p) \quad (3-10)$$

$$(f_k f_k) = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (3-11)$$

### 3-3 因子分析模型の行列による表現

これまで述べて来た表式を行列で表現する。

$n$  人の被験者に対する  $p$  個の標識に対する標準得点を成分とする  $(n, p)$  型行列を

$$Z = (z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_p) = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1p} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{np} \end{pmatrix} \quad (3-12)$$

$n$  人の被験者に対する  $r$  個の共通因子得点を成分とする  $(n, r)$  型行列を

$$F = (f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_r) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1r} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nr} \end{pmatrix} \quad (3-13)$$

とする。但し、 $F$  は推定量である。

$r$  個の列ベクトル  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) の要素に  $p$  個の共通因子負荷量を成分として含む  $(p, r)$  型行列を

$$A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_r) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pr} \end{pmatrix} \quad (3-14)$$

とする。

$n$  人の被験者に対する  $p$  個の独自因子得点を成分とする  $(n, p)$  型行列を

$$U = (u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_p) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1p} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{np} \end{pmatrix} \quad (3-15)$$

とする。但しこれは推定量である。

$p$  個の独自因子に対する独自因子負荷量を対角要素とする  $(p, p)$  型の対角行列を

$$D = (d_1 \ d_2 \ \cdots \ d_p) = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_p \end{pmatrix} \quad (3-16)$$

とする。但しこれは推定量である。

以上の行列を用いれば、因子分析の基本模型 (3-6) 式は、

$$Z = F\tilde{A} + UD \quad (3-17)$$

となる。ここで  $\tilde{A}$  は行列  $A$  の転置行列を表わす。

同様にして、共通因子と独自因子に課した仮定 (3-7) ~ (3-11) もそれぞれ次のように表わされる。

## 因子分析を付加した意味構造分析

$$\tilde{F}U = 0 \quad (3-7)'$$

$$\frac{1}{n} \tilde{U}U = I_p \quad (p \text{ 次の単位行列}) \quad (3-8)' \quad (3-10)'$$

$$\frac{1}{n} \tilde{F}\tilde{F} = I_r \quad (r \text{ 次の単位行列}) \quad (3-9)' \quad (3-11)'$$

### 3-4 因子分析模型の因子解

因子模型の式 (3-17) を解くために、標準得点行列を用いて調査項目である標識間の相関行列  $R$  を求める。

$$\begin{aligned} R &= \tilde{Z}Z \\ &= \tilde{A}A + D^2 \end{aligned} \quad (3-18)$$

ここで

$$R^\dagger \equiv R - D^2 \quad (3-19)$$

を定義すれば

$$\begin{aligned} R^\dagger &= A\tilde{A} \\ &= a_1\tilde{a}_1 + a_2\tilde{a}_2 + \cdots + a_p\tilde{a}_p \end{aligned} \quad (3-20)$$

となる。(3-20) から分かるように、因子解を求める手順は、左辺の行列  $R^\dagger$  から右辺の因子負荷行列（又は因子構造行列） $A$  を見出すことに帰着する。

$R^\dagger$  は対角要素のみが相関行列と異なっている。

$$R^\dagger = \begin{pmatrix} 1 - d_1^2 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 - d_2^2 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 - d_p^2 \end{pmatrix} \quad (3-21)$$

ここで

$$h_j^2 = 1 - d_j^2 \quad (j = 1, 2, \dots, p) \quad (3-22)$$

とおくと (3-18) より

$$h_j^2 = \sum_{k=1}^r a_{jk}^2 \quad (3-23)$$

となる。この量は、変量  $Z_j$  (標識  $j$ ) の各共通因子負荷量の平方和であり、“共通性”と呼ばれる。即ち、標準化された変量  $Z_j$  の分散 (= 1) は、独自性 ( $d_j^2$ ) と共通性 ( $h_j^2$ ) の和である。

$$(z_j z_j) = 1 = d_j^2 + h_j^2 \quad (3-24)$$

ところで、変量  $Z_j$  と共通因子  $f_k$  の共分散は、 $j$  番目の変量における  $k$  番目の共通因子負荷量に等しい：

$$(z_j f_k) = a_{jk} \quad (3-25)$$

(3-23) より、変量  $j$  の分散 (3-24) のうち、 $a_{jk}^2$  は第  $k$  番目の共通因子からの寄与である。そこで  $a_{jk}^2$  を「共通因子  $f_k$  の変量  $j$  における寄与」と言うことができる。共通因子  $f_k$  の寄与をすべての変量について加えたもの

$$v_k = \sum_{j=1}^p a_{jk}^2 \quad (3-26)$$

は「共通因子  $k$  の寄与」と呼ばれ、

$$p_k = v_k / p \quad (3-27)$$

は「 $k$  番目の共通因子の寄与率」と呼ばれる。言換えれば、寄与率  $p_k$  は、すべての標識 (変量) に関する標準得点の分散の総和、即ち、 $p$  (標識の数) のうち何程の部分が当該共通因子  $f_k$  によって尽されているかを表わす指標である。

### 3-5 主因子法による解き方

因子分析の解を求める方法として、統計的な意味で最も基本的と言わ  
れている主因子法<sup>3)</sup>を採用する。この方法は、第 1 因子から順次因子寄与  
を最大とするように因子負荷量を定めて行く方法である。今第  $k$  番目の因子の  
寄与  $v_k$  (3-26) 式が最大になる解を求める。既に述べたように、「寄与」の定義を考えれば、このことは、第  $k$  共通因子と各標識 (変量)  
との共分散の平方和  $v_k$  を最大にすることを意味する。言換えれば、  
全標識の共分散

$$\tilde{Z}Z = a_1 \tilde{a}_1 + a_2 \tilde{a}_2 + \cdots + a_p \tilde{a}_p + D^2 \quad (3-28)$$

のうち、第  $k$  因子によって説明される共分散

$$a_k \tilde{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k}^2 & a_{1k} a_{2k} & \cdots & a_{1k} a_{pk} \\ a_{2k} a_{1k} & a_{2k}^2 & \cdots & a_{2k} a_{pk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{pk} a_{1k} & a_{pk} a_{2k} & \cdots & a_{pk}^2 \end{pmatrix} \quad (3-29)$$

## 因子分析を付加した意味構造分析

が、「寄与  $v_k$  ((3-29) 式の対角和) が最大である」という意味で最大となるように因子解  $a_k$  を求めるのである。

結局、主因子法による解法は、

「 $R^T = A\tilde{A}$  ((3-20) 式) を満しながら、 $k$  番目の共通因子  $f_k$  の寄与  $v_k$  を最大にする解を求める」と定式化できる。

(3-20) を行列要素として表わせば、

$$r_{ij}^T = \sum_{k=1}^r a_{ik} a_{jk} \quad (i, j = 1, 2, \dots, p) \quad (3-30)$$

となり、主因子法は、すべての  $(i, j)$  の組について (3-30) を満しながら因子寄与  $v_k$  を最大にする解  $a_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) を求めることに等しい。

これは条件付き極値問題であり、解法にはラグランジエの未定乗数法を用いる。そのためには、

$$T = \frac{1}{2} \left\{ v_k + \sum_{i,j=1}^p \mu_{ij} \left( r_{ij}^T - \sum_{k=1}^r a_{ik} a_{jk} \right) \right\} \quad (3-31)$$

なる変分量を考え、以下の偏微分を 0 とおけばよい。

$$\frac{\partial T}{\partial a_{hi}} = 0 \quad \begin{cases} h = 1, 2, \dots, p \\ i = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (3-32)$$

但し、 $\mu_{ij}$  ( $= \mu_{ji}$ ) はラグランジエの未定乗数である。

(3-32) 式は、

$$\sum_{j=1}^r r_{ij}^T a_{jk} - \lambda_k a_{ik} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (3-33)$$

$$\lambda_k \equiv \sum_{j=1}^r a_{jk}^2 \quad (3-34)$$

となる。これを行列で表現すれば、

$$(R^T - \lambda_k I_p) a_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (3-35)$$

となる。このように主因子法による解法は、行列  $R^T$  についての固有値問題に帰着する。固有値は  $\lambda_k$  であり、固有ベクトルは  $a_k$  である。(3-34) と (3-35) より、固有ベクトルは

$$\bar{a}_k \cdot a_k = \lambda_k \quad (3-36)$$

のよう規格化されていなければならない。(3-26) と (3-34) より第  $k$  番目の共通因子の寄与  $v_k$  は固有値  $\lambda_k$  に等しいことが分かる。従

って固有値としては大きいものから  $r$  個を選択すれば、主因子法による直交する因子解  $a_k(k = 1, 2, \dots, r)$  に対して、共通因子  $f_k$  が  $k$  個推定されたことになる。 $(3-35), (3-36)$  は

$$R^t A = A A \quad (3-37)$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_r \end{pmatrix} \quad (3-38)$$

$$\tilde{A}A = A \quad (3-39)$$

と表わせる。

ここに於て、因子分析模型の主因子法による直交解として因子負荷行列  $A$  が求まることになる。

### 3-6 共通因子軸の回転

因子模型の直交解である因子負荷行列が求まつたとしよう。このとき、推定される  $r$  個の共通因子ベクトル  $f_k(k = 1, 2, \dots, r)$  を直交座標軸(共通因子軸)とするような共通因子空間が生成される。標識  $j$  の標準得点  $z_j((3-6)$  式) は、共通因子軸の回転(直交変換)に対して不変の筈である。このことは、共通因子(得点)行列  $F((3-13)$  式)と因子負荷行列  $A((3-14)$  式)とが、共通因子軸の回転という直交変換に対して全く同じ変換を受けなければならないことを意味している。このことから、主因子法に従つて求められた因子負荷行列に対して、共通因子空間内の共通因子軸の回転に対応する直交変換を施して新しい因子負荷行列  $A'$  を作ると、 $A'$  も又同じ  $R^t$  に対する直交因子解となつてゐることを示すことが出来る。従つて任意の因子軸の回転の中から因子構造を説明するのに最も都合のよい直交変換を選択すればよい。因子分析でよく採用される選択は、因子負荷行列が単純構造となるものである。

単純構造とは、各因子に対する因子負荷量がゼロに近い値と絶対値の大きい値とに大別出来ること、言換えれば、各共通因子負荷量の平方の分散が最大となる因子負荷行列のことを言う。このような直交変換は、共通因子軸の varimax 回転によって実現される。

第  $k$  因子についての因子負荷量の平方の分散(第  $k$  因子の寄与の分

## 因子分析を付加した意味構造分析

散) は,

$$V_k = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (a_{ik}^2 - \bar{a}_k^2)^2 \quad (3-40)$$

$$\bar{a}_k^2 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p a_{ik}^2 (= p_k(\text{寄与率})) \quad (3-41)$$

で表わされる。今、任意の 2 つの因子  $k, l$  を考え、因子軸  $k, l$  によって定まる平面内での直交する 2 因子軸の回転を考え、

$$V_{kl} = V_k + V_l \quad (3-42)$$

を最大にするような変換  $T_{kl}$  を求める。

$$(a'_k, a'_l) = (a_k, a_l) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (3-43)$$

$$T_{kl} = \begin{pmatrix} t_{kk} & t_{kl} \\ t_{lk} & t_{ll} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (3-44)$$

ここで「」のついた共通因子負荷量列ベクトルは変換後のものを表わし、 $\theta$  は回転角を表わす。 $V_{kl}$  の最大値を与える条件は、

$$\frac{dV_{kl}}{d\theta} = 0 \quad (3-45)$$

$$\frac{d^2V_{kl}}{d\theta^2} < 0 \quad (3-46)$$

である。この条件を満す回転角  $\theta$  は (3-47) 式で与えられる。

$$\tan 4\theta = K_1/K_2 \quad (3-47)$$

$$\begin{cases} K_1 = d - 2ab/p \\ K_2 = c - (a^2 - b^2)/p \end{cases} \quad (3-48)$$

$$\left| \begin{array}{l} a \equiv \sum_{i=1}^p (a_{ik}^2 - a_{ii}^2) \\ b \equiv 2 \sum_{i=1}^p a_{ik} a_{ii} \\ c \equiv \sum_{i=1}^p (a_{ik}^2 - a_{ii}^2)^2 - 4 \sum_{i=1}^p (a_{ik} a_{ii})^2 \\ d \equiv 4 \sum_{i=1}^p (a_{ik}^2 - a_{ii}^2) a_{ik} a_{ii} \end{array} \right. \quad (3-49)$$

因子軸  $k, l$  によって定まる平面上で  $4\theta$  が存在可能な象限は、次表のようになる。 $K_1, K_2$  の符号によって回転角  $4\theta$  の存在する象限を表 1 のように選択しなければならない。

表 1 Varimax 回転角  $4\theta$  の存在する象限

$K_1$	$K_2$	$4\theta \quad (-\pi \leq 4\theta \leq \pi)$
+	+	第 1 象限
+	-	第 2 象限
-	+	第 4 象限
-	-	第 3 象限

以上のことから、すべての因子についての因子負荷量の平方の分散の和

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_r \quad (3-50)$$

を最大にする直交変換  $T$  は

$$T = T_{12} T_{13} \cdots T_{1r} T_{23} \cdots T_{2r} \cdots T_{r-1,r} \\ = \prod_{k < l} T_{kl} \quad (3-51)$$

となる。変換行列  $T$  は直交行列であり、

$$\tilde{T}T = T\tilde{T} = I_r \quad (3-52)$$

を満す。

### 〈規準化 Varimax 法〉

varimax 回転で得られる因子解では、共通性の大きい変量では平均的に各因子の負荷量も大きく、それだけ回転に大きな影響を与える。そこで、すべての変量の因子負荷量をそれぞれの共通性の平方根  $h_i$  で規準化

## 因子分析を付加した意味構造分析

してから *varimax* 回転を行なうことによって因子負荷量の大きい変量が回転に与える影響を抑制することが出来る。すなわち *varimax* 回転の基準として規準化された  $V$

$$V = \sum_{k=1}^p \left\{ \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (a_{ik}/h_i)^4 - (\bar{a}_k^2)^2 \right\} \quad (3-53)$$

$$\bar{a}_k^2 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (a_{ik}/h_i)^2 \quad (3-54)$$

を最大にするような回転(直交変換)を求める。これを規準化 *varimax* 法<sup>3)</sup> と言う。

共通性  $h_i^2$  を要素とする対角行列を  $H^2$  とする。

$$H^2 = \begin{pmatrix} h_1^2 & & & \\ & h_2^2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & h_p^2 \end{pmatrix} = \text{diag}(A\tilde{A}) \quad (3-55)$$

ここで、 $\text{diag}(X)$  は、 $X$  の対角要素のみからなる対角行列を表わす。共通性は (3-52) と (3-55) とから、*varimax* 回転に対して不变であるから、因子負荷量を共通性の平方根で規準化しても以前の定式化がそのまま有効である。従って規準化 *varimax* 法の手順は次のようになる。

主因子法による因子負荷行列を  $A_0$  とすると、規準化された因子負荷行列は

$$A = H^{-1}A_0 \quad (3-56)$$

である。 $A$  を用いて得られた変換行列を  $T$  とすると変換された行列  $A'$  は、

$$A' = AT \quad (3-57)$$

である。この  $A'$  に  $H$  を掛けて、規準化されていた分だけもとに戻せば、共通性の大きい変量に影響されずに単純構造をもった因子解(因子負荷行列)  $A'_0$  を最終的に求めることが出来る。

$$A'_0 = HA' (= HAT = HH^{-1}A_0T = A_0T) \quad (3-58)$$

### 3-7 因子分析計算の手順

〈主因子法による数値計算〉

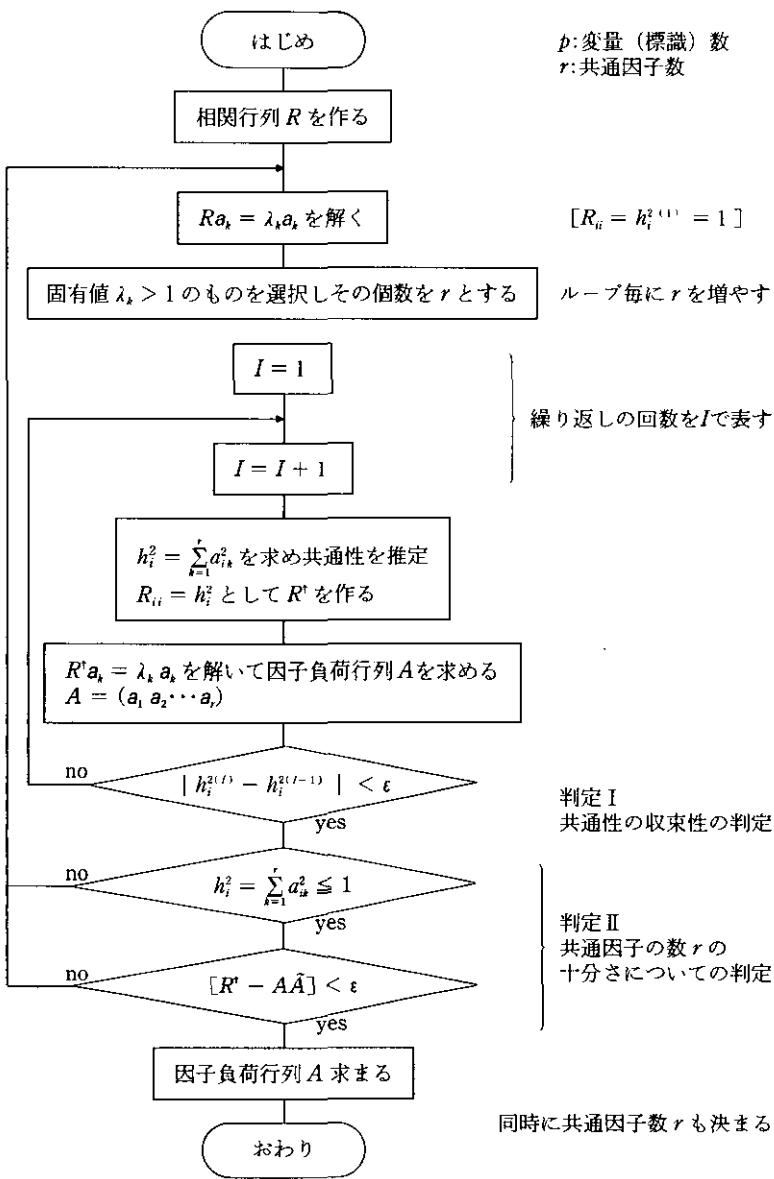


図 2 主因子法による数値解法の流れ図

## 因子分析を付加した意味構造分析

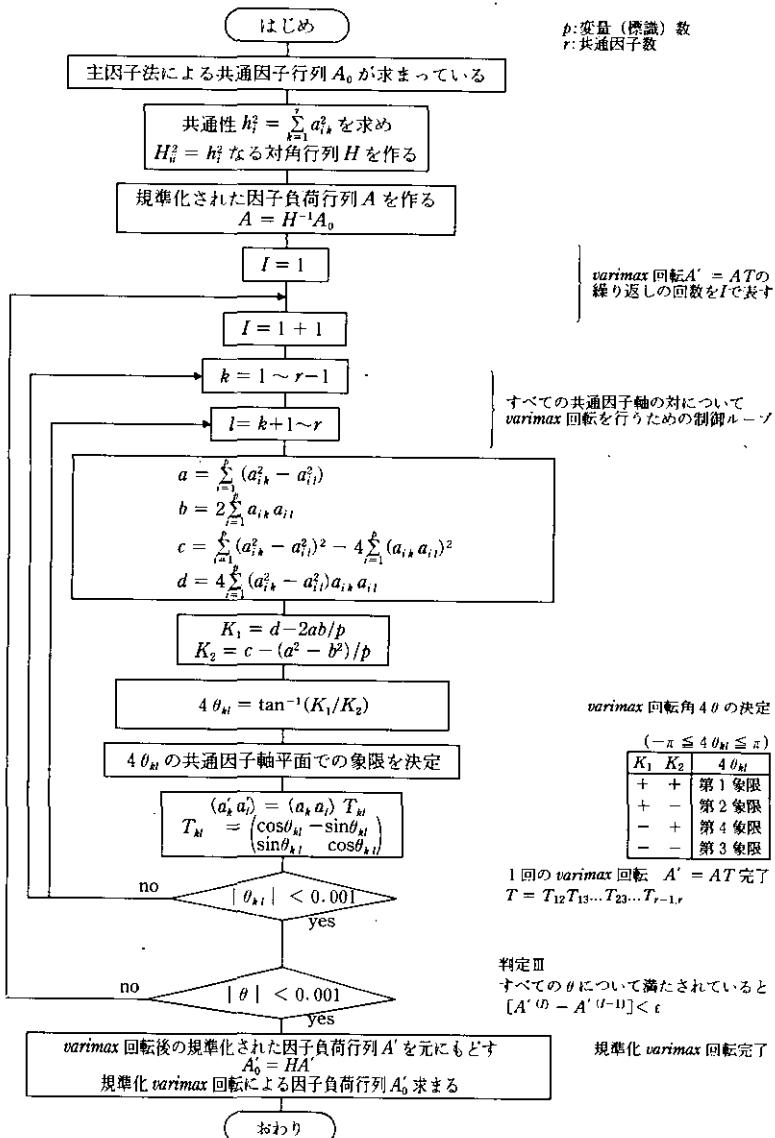


図3 規準化 Varimax 法による数値解法の流れ図

要素 5 に関する相関行列から出発して、主因子法によって因子負荷行列  $A$  を数値的に求める手順を図 2 に示す。 $I = 1$  回目：はじめに相関行列 ( $R_{ii} = h_i^2 = 1$ ) についての固有値問題を解く。固有値  $\lambda$  の中から、 $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_r \geq 1$  なるものを  $r$  個選択する。それらの固有ベクトルを用いて共通性  $h_i^2 (i = 1, 2, \dots, p)$  を計算し、相関行列  $R$  の対角要素をそれで置換して得られる行列を  $R'$  とする。 $I = 2$  回目： $R'$  についての固有値問題を解き  $A$  を求め共通性  $h_i^2$  を計算する。判定 I :  $I$  回目の共通性  $h_i^{2(I)}$  と  $(I-1)$  回目の  $h_i^{2(I-1)} (i = 1, 2, \dots, p)$  を比較し、差が適當な  $\varepsilon$  より小さいかどうかを判定する。小さくなれば判定 I が満されるまで  $I$  回目以降のループを繰返す。判定 I が満足されたならば、共通因子数  $r$  の十分さについての判定 II を行なう。判定 II では、

$$h_i^2 = \sum_{k=1}^r a_{ik}^2 \leq 1 \quad (3-59)$$

及び

$$[R' - A\tilde{A}] < \varepsilon \quad (3-60)^*)$$

が満されていなければ、相関行列  $R$  についての固有値問題に戻り、共通因子数  $r$  を増やし、以前と同様の過程を繰返す。再び判定 II の条件について調べ、条件 II が満されていなければこの条件が満されるまで共通因子数を増やして行く。以上の数値計算の後、因子負荷行列  $A$  が求まる。

#### 〈規準化 Varimax 回転法による数値計算〉

主因子法による因子分析の解を  $A_0$  とする。 $A_0$ に基づいた共通因子軸の規準化 varimax 回転の数値計算の手順を図 3 に示す。まず共通性を要素とする行列  $H$  を作り、(3-56) 式によって規準化された因子負荷行列  $A$  を求める。2重ループ  $k = 1 \sim r-1, l = k+1 \sim r$  によってすべての共通因子軸の対についての varimax 回転を行ない、 $A' = AT$  を求める ( $T$  は (3-51) 式で与えられる)。ここで、直交変換  $T$  のすべての共通因子軸の対についての回転角が 0.001 ラジアンより小さいかど

\* ) 但し、 $[X] < \varepsilon$  は、行列  $X$  の最小二乗平均が十分小さい :  $\text{tr}(\tilde{X}X) < \varepsilon$  ことを意味する。  
 $\text{tr}(Y)$  は行列  $Y$  の跡 (対角要素の和) をとることを示す。

## 因子分析を付加した意味構造分析

うかの判定Ⅲを行なう。もし判定Ⅲが満されていなければ、再び  $A' = AT$  を求めるための 2 重ループを繰返す。

条件Ⅲが満されたならば、 $A'$  が決定する。最後に、varimax 回転後の規準化された因子負荷行列  $A'$  に  $H$  を作用させ、主因子法による解  $A_0$  に varimax 回転  $T$  を施した因子解  $A'_0$  が求まる：

$$A'_0 = HA' = A_0 T \quad (3-61)$$

## 4. 因子分析を付加した意味構造分析

### 4-1 因子分析の結果

#### 〈共通因子数〉

表 2 に主因子法による  $R^t$  行列の固有値を示す。固有値による共通因子数  $r$  の判定条件 I によれば  $r = 3$  であるが、 $R^t$  行列と因子負荷行列の積  $AA^t$  との自己無撞着性についての判定条件Ⅲが少数点以下 2 桁まで満されているためには  $r = 5$  が必要である。

#### 〈主因子法による因子負荷行列〉

表 3 に主因子法による因子負荷行列を示す。標識毎の共通性のバラツキが比較的大きい（最小 0.267 から最大 0.688 まで）。寄与率の大きな部分が 1 ~ 2 の因子 ( $f_1$  および  $f_2$ ) に集中している。各標識には、絶対値が同程度の因子負荷量が含まれている場合が多い。この段階で、支配的な大きさの負荷量をもつ 1 個の共通因子で特徴づけられている標識は、標識 [23] [24] [25] [26] の 4 個に過ぎない。このままであると、共通因子による標識の説明は容易とは言えない。

#### 〈素 Varimax 回転後の因子負荷行列〉

素 varimax 回転を施した後の因子負荷行列を表 4 に示す。主因子法による負荷行列と比べて顕著な違いは、それぞれの因子に於ける各標識の負荷量が、絶対値の大きいものと 0 に近いものとの 2 群に大別されて

\* ) この段階の varimax 回転を、後段の「規準化 varimax 回転」に対して「素 varimax 回転」と呼ぶ。

表2  $R^T$ 行列の固有値

2.6274	1.5086	1.0007	0.6294	0.5257	0.2567	0.1468	0.0425	0.0072	-0.0462	-0.0847	-0.1461	-0.1762
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	---------	---------	---------	---------

表3 共通因子負荷量

標識	共 通 因 子(寄与率(%))					共通性
	$f_1$ (20.21%)	$f_2$ (11.60%)	$f_3$ (7.70%)	$f_4$ (4.84%)	$f_5$ (4.04%)	
[20]	0.41355	-0.03500	-0.53624	-0.46338	0.11338	0.687
[21]	-0.54778	0.00446	0.47750	-0.13927	-0.08420	0.555
[22]	0.29771	0.00810	-0.21612	0.31354	0.18132	0.267
[23]	-0.70625	-0.02122	-0.18859	0.06402	0.02456	0.539
[24]	0.71958	-0.18622	-0.18946	0.08205	-0.07271	0.600
[25]	-0.29241	0.75552	-0.03998	-0.08174	0.15341	0.688
[26]	-0.25909	0.68132	0.01296	-0.08593	-0.00796	0.539
[27]	0.08055	-0.24780	0.24778	0.25832	0.40986	0.364
[28]	0.44415	0.45425	0.02628	0.29307	-0.10996	0.502
[29]	0.50699	0.31948	0.11487	0.01011	0.16899	0.401
[30]	-0.18206	0.08179	0.36781	-0.21384	0.26450	0.291
[31]	-0.47756	-0.06973	-0.24967	0.00199	0.39968	0.455
[32]	-0.42008	0.23620	-0.30392	0.27136	-0.07142	0.403
寄与	$f_1$ (2.627)	$f_2$ (1.509)	$f_3$ (1.001)	$f_4$ (0.629)	$f_5$ (0.526)	6.293

表4 素Varimax回転後の共通因子負荷量

標識	共通因子(寄与率%)					共通性
	$f_1$ (7.17%)	$f_2$ (12.01%)	$f_3$ (16.95%)	$f_4$ (8.01%)	$f_5$ (4.27%)	
[20]	0.05095	-0.04996	0.12142	-0.81559	-0.04848	0.687
[21]	-0.52288	0.13437	-0.23769	0.45137	-0.05361	0.555
[22]	0.43358	-0.07085	0.13439	-0.10099	0.21287	0.267
[23]	-0.05607	0.18722	-0.69239	0.14799	0.00201	0.539
[24]	-0.06475	0.01900	-0.74841	0.17644	-0.06777	0.600
[25]	-0.01754	0.82679	-0.05340	0.02532	0.02728	0.688
[26]	-0.04094	0.71991	-0.01712	0.07884	-0.11174	0.539
[27]	0.01595	-0.23368	0.08305	0.19842	0.51271	0.364
[28]	0.41542	0.24903	0.50236	0.08423	-0.09070	0.502
[29]	0.12891	0.17518	0.56448	-0.11309	0.14910	0.401
[30]	-0.42486	0.17273	0.03767	0.13315	0.24763	0.291
[31]	-0.03651	0.14631	-0.54798	-0.09312	0.35115	0.455
[32]	0.29525	0.31609	-0.43822	0.12665	-0.09054	0.403
寄与	$f_1$ (0.932)	$f_2$ (1.561)	$f_3$ (2.204)	$f_4$ (1.041)	$f_5$ (0.555)	6.293

表5 標準化 Varimax回転後の共通因子負荷量

標識	共通因子(寄与率%)					共通性
	$f_1$ (6.88%)	$f_2$ (11.85%)	$f_3$ (16.85%)	$f_4$ (8.24%)	$f_5$ (4.58%)	
[20]	0.77986	-0.06374	0.13747	0.18181	-0.15226	0.687
[21]	-0.35844	0.09649	-0.23031	-0.60308	0.00501	0.555
[22]	0.05446	-0.02531	0.11301	0.46121	0.19363	0.267
[23]	-0.12219	0.17962	-0.69261	-0.10818	-0.02982	0.539
[24]	-0.16149	0.00780	-0.74410	-0.11276	-0.08860	0.600
[25]	0.00304	0.82295	-0.05675	-0.08561	-0.01832	0.688
[26]	-0.06732	0.70836	-0.01206	-0.11479	-0.13895	0.539
[27]	-0.13455	-0.19821	0.04747	0.03040	0.55085	0.364
[28]	-0.16099	0.28123	0.49557	0.38239	-0.07388	0.502
[29]	0.10733	0.19487	0.55258	0.15074	0.15297	0.401
[30]	-0.02506	0.15490	0.02890	-0.43876	0.26989	0.291
[31]	0.15444	0.15612	-0.56648	-0.02738	0.29177	0.455
[32]	-0.16990	0.33208	-0.44100	0.23149	-0.12705	0.403
寄与	$f_1$ (0.894)	$f_2$ (1.540)	$f_3$ (2.191)	$f_4$ (1.071)	$f_5$ (0.595)	6.293

いることである。従って、与えられた標識における因子負荷量は、3個の標識 [28] [30] [32] を除いてそれぞれある1つの共通因子に集中している。このように素 varimax 回転によって殆どの標識が1個の共通因子によって説明されることが可能となった。言換えれば因子負荷行列が単純構造に変換されたことになる。

#### 〈規準化 Varimax 回転〉

表3で見たように、各標識の共通性  $h^2$  には、標識 [22] の0.267から標識 [25] の0.688までバラツキがある。

標識 [22] 「授業中の打鍵は止めた方がよい」、標識 [30] 「授業にもっと遊ぶ要素があってもよい」、標識 [27] 「授業中は話声が多くうるさかった」の3標識はともに共通性は小さく、独自性は  $d^2 \geq 0.7$  である。このことは、これら3標識は他の標識との間の相関が小さく調査対象に関する独自な事象を抽出しており、今問題にしている要素5の中で特色ある調査項目となっていることを示している。

しかし標識間で共通性にバラツキがあると、因子負荷行列の単純構造への変換が妨げられるので、ここでは各標識の因子負荷量をその標識に属する共通性の平方根によって規準化した上で varimax 回転を施すことにしておこう。結果は表5に示されている。

素 varimax 回転の場合と比べて、因子負荷行列の単純構造化が更に促進されている：

- i) 寄与率が共通因子間でやや平準化された。
- ii) 各標識に於ける因子負荷量はそれぞれある1個の共通因子に集中する。例外は標識 [28] と [32] である。これらの標識では主要な共通因子の他に、無視できない負荷量をもつ共通因子が1～2個存在する。図4ではこのような副次的な共通因子を網掛の帶で示してある。

しかし全体として素 varimax 回転による結果と規準化 varimax 回転による結果との間には極立った違いは認められない。

なお、因子  $f_1$  と因子  $f_4$  の役割が入替っており、又、 $f_4$  の因子負荷量には対応する素 varimax 回転による因子負荷量に負号が共通に乗せられている。

## 因子分析を付加した意味構造分析

### 4-2 共通因子への属性の付与

この節では、前節で求められた共通因子が、調査対象に関する如何なる属性を抽出しているのかを推定する。図1に示されている調査項目(標識)の内容と、表5に示されている各共通因子が、因子負荷量の主要な成分としてどのような標識を含んでいるのかを考慮すれば、表6のような属性を5つの共通因子にそれぞれ付与することができる。

属性の推定にあたっては次の点に注意する。まず絶対値の大きい因子負荷量を有する標識の提示している事象を斟酌し、妥当する属性を推定する。次にその属性の見出し(標号)については、因子負荷量の正符号を有する標識が提示している事象を肯定するような命名をすべきである。

表6 共通因子に付与された属性

共通因子	属性
$f_1$	機械操作(打鍵操作)の習熟度
$f_2$	コミュニケーション(議論・話合い・相談)
$f_3$	授業内容の概念的理解の水準
$f_4$	実習を伴う授業における説明・解説
$f_5$	実習を伴う授業の運営(動機付けと統率)

### 4-3 意味構造グラフに於ける共通因子軸の導入

意味構造グラフ(SSグラフ)を描くにあたって、従来通り評定平均値をグラフの縦軸にとる。次にグラフの横軸として今回新たに共通因子軸を設定することにする。共通因子軸はSSグラフの横軸設定のための1つの試みであり、その軸に沿って共通因子を配置しそのそれに、推定される調査対象に関する属性を標号として付与してある。

第1節でも述べたように、具体的な事例として、当大学経済学部経営情報学科1年次必修科目である『プログラミング論Ⅰ』に於ける「授業の具体的な進め方」(要素5)に関する質問紙調査を取上げる。質問紙調査の集計に基づく意味構造グラフ(共通因子軸なし)は文献1)に表示されている。この意味構造グラフから要素5に属する各標識が有する評定平均値を読み取ることができる。一方前節で示したように、主因子法によって求められた因子構造に標準化 varimax 回転を施せば、因子負

荷行列は単純構造を獲得し、その結果各標識に対して支配的な大きさを有する共通因子がただ 1 つ定まる。第 4 図に評定平均値を縦軸にとり、前節で因子分析によって求められた 5 個の共通因子を横軸にとる。このようにして求められた評定平均値と共通因子とによって、各標識を第 4 図に設定された 2 次元平面に配置し、更に意味構造分析によって定義される順序関連に従って有向階層構造を形成すれば、因子分析法によって再構成された SS グラフが完成する(図 4)。これを見ると被験者(学生)の調査対象「授業の具体的な進め方」の評価に関する心理的構造を読み取ることができる。

#### 4-4 因子分析によって再構成された意味構造グラフの評価

意味構造グラフ(SS グラフ) 上、評定平均値が正の領域、即ち、標識が規定する「ある事象の量的大小関係の程度」に、被験者が「先進性」の評価を与えている場合、或いは、標識が提示するある命題に対して被験者が「同意」の評価を与えている場合から考察しよう。

SS グラフ上で“極”の位置にある標識は、標識 [30] 「授業にもっと遊ぶ要素があってもよい」、標識 [23] 「打鍵中に説明されるので理解出来なかつた」である。標識 [30] は最も高い、標識 [23] はそれに続く高い評定平均値を有している。SS グラフ上に於ける“極”とは、そこから更に順序関連(或いは逆順序関連)の矢が出ていない標識を表わし、標識に付与されている事象に対して被験者の「同意・先進性」「不同意・遅延性」の積率から定義される順序関連(逆順序関連)の矢が大域的に(標識 [30] の場合)、又は局所的に(標識 [23] の場合)終結する点を明示する。言換えれば、被験者の評価・関心・意識のモーメントが当該標識に関して「同意・先進性」「不同意・遅延性」の一方向のみで閉じていることを意味している。

標識 [30] は、共通因子  $f_4$  「実習を伴う授業に於ける説明・解説」の因子に位置づけられ、標識 [23] は共通因子  $f_3$  「授業内容の概念的理解の水準」に位置づけられる。共通因子  $f_4$ ,  $f_3$  に対する因子負荷量はいずれも負であることから、被験者は、実習を伴う授業に時間的にも精神的にも余裕、或いはゆとりを求めていると言えるであろう。

次に意味構造グラフ上“焦点”的位置にある標識は、標識 [25] 「授

## 因子分析を付加した意味構造分析

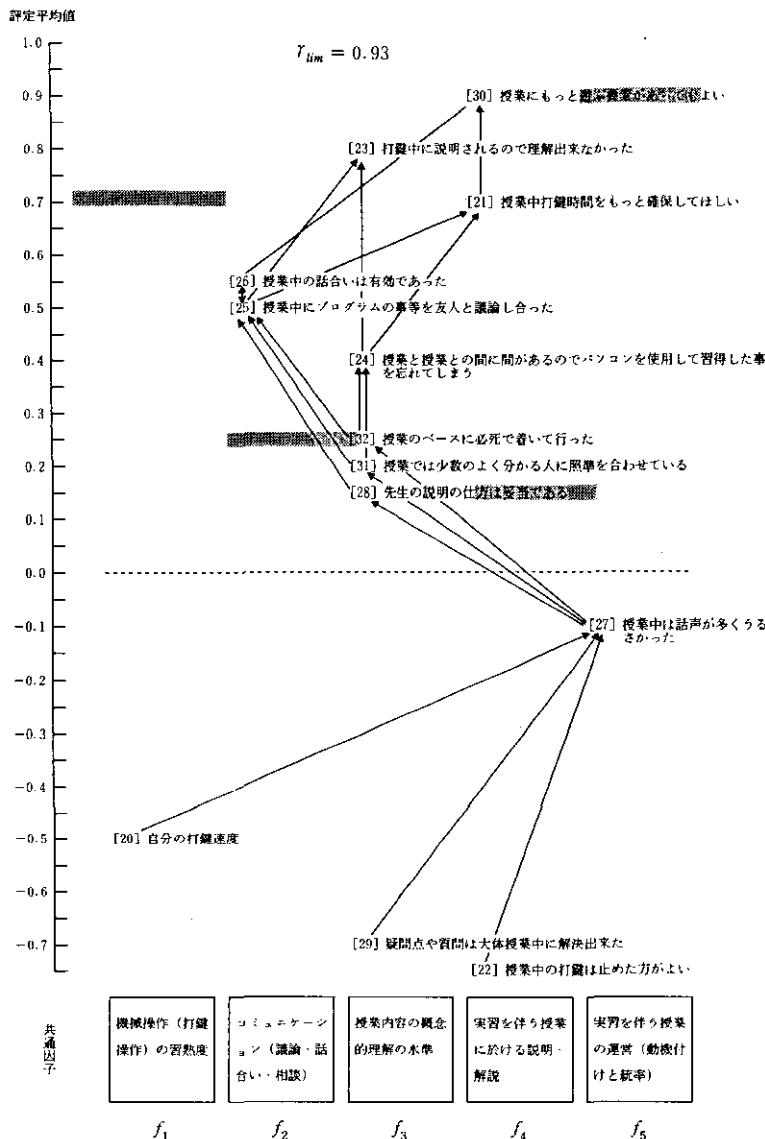


図4 要素5に対する因子分析を付加した意味構造グラフ（SS グラフ）

業中にプログラムの事等を友人と議論し合った」、標識 [24]「授業と授業との間に間があるのでパソコンを使用して習得したことを忘れてしまう」である。意味構造グラフ上での“焦点”とは、互いに順序関連（逆順序関連）が無い複数の標識からその点に向って順序関連（逆順序関連）の矢が収束し、且つ互いに順序関連（逆順序関連）が無い複数の標識に向かってその点から順序関連（逆順序関連）の矢が発散して行く標識のことである。言換えれば、互いに順序関連（逆順序関連）のない標識群から「同意・先進性」（「不同意・遅延性」）の積率が収束し、同時に互いに順序関連（逆順序関連）のない標識群へ「同意・先進性」（「不同意・遅延性」）の積率が発散する標識を明示し、SS グラフ上で被験者に共通する強い関心・興味・意識の指向する流れの動向を規定する。

標識 [25] は共通因子  $f_2$ 「コミュニケーション（議論・話合い・相談）」に位置づけられ、標識 [24] は共通因子  $f_3$ 「授業内容の概念的理解の水準」に位置づけられる。標識 [25] に於ける共通因子  $f_2$  の因子負荷量は正であるのに対して、標識 [24] に於ける共通因子  $f_3$  の因子負荷量は負である。この領域では、評定平均値の上昇に伴い、順序関連の矢が、換言すれば被験者の評価・関心・意識の指向する流れが、共通因子  $f_5$ 「実習を伴う授業の運営（動機付けと統率）」から共通因子  $f_3$ 「授業内容の概念的理解の水準」に大きく移行し、そこから更に共通因子  $f_2$ 「コミュニケーション（議論・話合い・相談）」に分岐し、最後に共通因子  $f_4$ 「実習を伴う授業に於ける説明・解説」に終結するという大局的な被験者の心理的構造を把握することが出来る。

次に評定平均値が負の領域、即ち、被験者全体として標識に対して「不同意・遅延性」の評価を与えている場合を取り上げる。SS グラフ上、局所的な“極”的位置にある標識は、標識 [20]「自分の打鍵速度」と標識 [29]「疑問点や質問は大体授業中に解決出来た」であり、大域的な“極”的位置にある標識は、標識 [22]「授業中の打鍵は止めた方がよい」である。これら 3 個の標識は、「不同意・遅延性」の評定平均値の相対的に大きい領域に存在し、標識 [20] は共通因子  $f_1$ 「機械操作（打鍵操作）の習熟度」に、標識 [29] は共通因子  $f_3$ 「授業内容の概念的理解の水準」に、そして標識 [22] は共通因子  $f_4$ 「実習を伴う授業に於ける説明・解説」にそれぞれ位置づけられており、いずれの場合にも因子

## 因子分析を付加した意味構造分析

負荷量は正である。従って逆説的ではあるが、被験者による「不同意・遅延性」の評定平均値は相対的に大きいけれども、これら3個の標識の提示している事象とそれに付与されている共通因子の属性とは、これらの極が実習を伴う当該授業科目に於いて期待される到達点を意味構造グラフ上に表現していると言ってよいであろう。

SSグラフ上で“焦点”の位置にある標識は、標識[27]「授業中は話声が多くうるさかった」である。この標識は共通因子 $f_5$ 「実習を伴う授業の運営（動機付けと統率）」に位置づけられ、その因子負荷量は正である。従って被験者からみれば共通因子 $f_5$ は授業運営に対する“不満”的因子とも言える。標識[27]に対する評定平均値は-0.104で僅かに「不同意」の評価を獲得しているが、評定平均値の増大に伴い、極から出ている順序関連の矢、即ち、被験者の評価・関心・意識は“不満”因子としての $f_5$ 「実習を伴う授業の運営」を指向している。

因子分析を付加したSSグラフを俯瞰して、調査対象に対する被験者の評価・関心・意識の動向を大局的に把握してみよう。

評定平均値が負の領域にある極から生起する被験者の関心は評定平均値増大に伴って、まず共通因子 $f_5$ 「実習を伴う授業の運営」にそのモーメントを獲得する。その後、順序関連の矢は評定平均値=0の線を横切り、被験者の関心は因子 $f_3$ 「授業内容の概念的理解の水準」へ移行し、その領域で $f_3$ と $f_2$ 「コミュニケーション（議論・話合い・相談）」の2因子へ分岐する。分岐した関心・興味・意識の心理的流れは評定平均値増大と共に部分的に因子 $f_3$ に収束しつつ最終的には共通因子 $f_4$ 「実習を伴う授業に於ける説明・解説」に終結する。興味深いことに、順序関連の端点、即ち、大域的な2つの極にある標識[30]「授業にもっと遊ぶ要素があってもよい」と標識[22]「授業中の打鍵は止めた方がよい」とは、いずれも共通因子 $f_4$ 「実習を伴う授業に於ける説明・解説」に位置づけられている。要素5の中で最小の評定平均値を有する標識[22]は因子 $f_4$ について正の因子負荷量を得ているが、最大の評定平均値を有する標識[30]に於ける因子 $f_4$ の因子負荷量は負である。従って実習を伴う授業に参加している学生（被験者）の最も高い関心・興味・意識は「授業としての説明とか解説」に向いているが、伝統的な所謂講義ではなく、実習を伴った授業に於いては“遊ぶ要素”即ち、キー操作・

パソコン・プログラム自体がもっている遊び（ゲーム）的要素を適度に解放し、時間的にも精神的にも“余裕・ゆとり”を持たせることに十分配慮しなければならないことを示唆していると言えよう。

最後に意味構造グラフの焦点の位置にある標識 [25] と [27] を考えてみる。この 2 標識はいずれも「授業中の雑談や話合い（議論）とその有効性」に係るものであるが、評定平均値が正の領域にある標識 [25] 「授業中にプログラムの事等を友人と議論し合った」は共通因子  $f_2$  「コミュニケーション（議論・話合い・相談）」に位置づけられ、評定平均値が負の領域にある標識 [27] 「授業中は話声が多くうるさかった」は共通因子  $f_5$  「実習を伴う授業の運営（動機付けと統率）」に位置づけられている。授業中の雑談や話合いがコミュニケーションとして積極的評価を得るか、「話声がうるさい」として実習を伴う授業の運営についての否定的“不満”的評価を得るかは、教員が統率力を發揮して、授業中の学生の情況を的確に把握し、授業で取扱う内容についての動機づけや、授業中に成すべきことを明確にするかどうかにかかっているようである。

#### 4 - 5 共通因子の寄与と共通性

要素 5 に於いて抽出された共通因子は 5 個であり、寄与率の大きい順に  $f_3$  「授業内容の概念的理解の水準」（寄与率 [16.9%]）、 $f_2$  「コミュニケーション（議論・話合い・相談）」（寄与率 [11.9%]）、 $f_4$  「実習を伴う授業に於ける説明・解説」（寄与率 [8.2%]）、 $f_1$  「機械操作（打鍵操作）の習熟度」（寄与率 [6.9%]）、 $f_5$  「実習を伴う授業の運営（動機付けと統率）」（寄与率 [4.6%]）となっている。これら 5 個の共通因子の寄与率の総和  $\sum_{k=1}^5 a_k$  は、～50% である。これは、すべての標識に関する標準得点の分散の総和のうち、～ $1/2$  がこれら 5 個の共通因子によって尽されている（説明されている）ことを示している。<sup>\*</sup>

要素 5 において、それに属する標識数が 6 個と最も多く、且つ、学生の関心の動向を常に支配している共通因子は  $f_3$  「授業内容の概念的理解の水準」である。共通因子  $f_3$  は最大の寄与率 16.9% を有している。

---

\*）なお、すべての共通因子についての寄与率の総和は varimax 回転に対して不变である。

## 因子分析を付加した意味構造分析

実習を伴う授業の評価を特徴づける共通因子の1つとして,  $f_1$ 「機械操作(打鍵操作)の熟練度」が抽出され, この因子には明らかに標識[20]「自分の打鍵進度」が支配的に対応している。しかし標識[20]の共通性は, 調査群, 要素5の中では最大値に近い0.687であり, 特に独自性の強い調査項目ではない。このことから『プログラミング論I』の「授業の具体的な進め方」の中で十分留意しなければならないのは, 打鍵操作の習熟度の向上と機械操作に対する心理的負荷の軽減である。

共通性が最も小さい3個の標識は, 標識[22]「授業中の打鍵は止めた方がよい」, 標識[30]「授業にもっと遊ぶ要素があってもよい」, 標識[27]「授業中は話声が多くうるさかった」であり, 標識[22]と[30]は大域的な極の位置にあり, 標識[27]は焦点の位置にある。共通性の値はそれぞれ  $h_{[22]}^2 = 0.267$ ,  $h_{[30]}^2 = 0.291$ ,  $h_{[27]}^2 = 0.364$  である。このことは, これら3個の標識が有している属性が, 共通因子によって十分尽されていないことを示している。従って標識[22]と[30]とは共通因子  $f_4$ 「実習を伴う授業に於ける説明・解説」に位置づけられ, 標識[27]は共通因子  $f_5$ 「実習を伴う授業の運営(動機付けと統率)」に位置づけられてはいるが, それと同時にこれら3個の標識が提示している事象それ自体を個別に重視すべきであって, それら個々の事象を共通因子に付与されている属性に平準化或いは, 一般化ないしは共通化しきつてしまってはいけない。

## 5. おわりに

本稿は, 意味構造分析に因子分析を付加することによって, 調査対象に対する被験者の評価・関心・意識の動向を大局的に把握し, 被験者の心理的構造を明らかにしようとしたものである。

因子分析は個々の調査項目(標識)の評定値の背後にある共通因子を抽出し, できるだけ少数の共通因子の得点によって, 全被験者の標識に関する評定値を説明しようとするものである。共通因子の数及び因子負荷行列は主因子分析法によって求められ, 主因子法による因子解に共通因子軸の varimax 回転を施すことによって因子負荷行列に単純構造を与えることができる。

因子分析を付加した意味構造分析に於いては、評定平均値を縦軸にとり、共通因子を横軸にとり、各標識をこの平面内に配置することによって有向階層構造を有する意味構造グラフ (SS グラフ) を再構成することが出来る。

その結果、標識間の順序関連、特に SS グラフ上の“極”と“焦点”的位置にある標識に関する順序関連が、共通因子間の順序関連を規定し、調査対象について、被験者の評価・関心・意識の指向する流れの動向を概観する大局的構造が SS グラフ上に表現される。これによって質問紙調査に対する被験者の評定に基いて、具体的な調査対象に関する被験者の評価について更に深い考察を加えることが出来るようになる。

今後の課題として i) 因子分析を付加した意味構造分析の有効性を他の調査事例について検証すること、 ii) 調査項目の設定の仕方に因子分析を付加した SS グラフがどのように依存するかについて詳細な検討を加えること、が挙げられる。更に付加えれば、 iii) 全く同一の質問紙調査を異なる場所・時点・被験者に対して実施したときに同一の共通因子が抽出されるかどうかは因子分析法としても興味深い問題である。

### 参考文献

- 1) 能登 宏 (1990年)「評定尺度法を用いた質問紙調査に於ける相関分析と意味構造分析の相補性」 北星学園大学経済学部北星論集第27号 pp.249-284。
- 2) 竹谷 誠 (1980年)「I R S テスト構造グラフの構成法と活用法」 日本教育工学雑誌5, pp.93-103。  
竹谷 誠 (1988年)「意味構造分析の利用法と授業評価への応用」 日本教育工学雑誌12(1), pp.1-8。  
竹谷 誠 (1989年)「選択肢回答のアンケート項目の順序特性」 電子情報通信学会論文誌A Vol.J72-A No. 5, pp.825-833。
- 3) N.D.Lawley and A.E.Maxwell 1963: Factor analysis as a statistical method.  
Butterworth(丘本正監修 因子分析法 日科技連出版社)。  
芝 祐順 (1978年)「因子分析法(第2版)」 東京大学出版会。  
柳井晴夫, 高根芳雄 (1985年)「新版多変量解析法」 現代人の統計  
(林 知己夫編) 2 朝倉書店。

北星学園大学経済学部 北星論集第28号 正誤表

頁・行	誤	正
127頁 11行目	$(u_i u_j)$	$(u_i \underline{u_j})$
129頁 8行目	$= \widetilde{A}A + D^2$	$= A\widetilde{A} + D^2$
137頁 図3	$I = \underline{1} + 1$	$I = I + 1$
137頁 図3	k, l ループの端点にある yes, no を削除	
140頁	表2 <u>R<sup>†</sup>行列の固有値</u>	表2 <u>R<sup>†</sup>行列の固有値</u>
142頁 下から3行目	又, $f_4$ の	又, $f_1$ の
143頁 下から8行目	付与してある。	付与する。
150頁 下から5行目	statistical method <sub>1</sub>	statistical method <sub>2</sub>
156頁	図4 <u>5,000m疾走中の心拍数</u>	図5 <u>各周回毎の平均速度の変化</u>
157頁	図5 <u>各周回毎の平均速度の変化</u>	図4 <u>5,000m疾走中の心拍数</u>