【研究ノート】

最適な資本蓄積経路について

酒井　　徹

1．はじめに

理論的定式化からすれば，資本理論は企業の最適化問題である。そこに使用される数学的手法からすれば，資本理論は最適制御理論と同一である。

いま資本蓄積が何故に毎時点でおこなわれるのであるかという基本的疑問から資本理論に入っていこう。資本ストックの調整費用モデルに典型的にみられるように，所望するだけの資本ストックを瞬時にして調整することは資本の属性たる「固定性」と矛盾する。よって緩慢な調整こそが当然の企業行動となる。このように短期のうちに終了しない資本蓄積過程においては，現在の決定は過去の決定をふまえてなされねばならず，現在の決定は資本ストックを通じて将来の決定を規定する。すなわち資本蓄積は recursive な過程としてとらえられるのである。ここに資本理論が最適制御理論と同一であるとされるゆえんがある。

費本の固定性は投資に伴う付加的費用の発生としてとらえられる。以下の議論にみられるようにそれは投資費用関数の凸性を意味しよう。すなわち，$C''(I)>0$ がこれである。これなくしては資本蓄積の最適経路は瞬時的に資本ストックの目標値 K^* へいわゆる「ジャンプ」することに帰着してしまう。このような解答はトリビュアルなケースとして退けられねばならない。然るに，我々が関心をもつ解答は，(1)目標資本ストック K^* が存在し，(2)そこへ向けて現実資本ストック K が緩慢に調整されていくような(3)粗投資関数の導出，である。

このような粗投資関数を企業の最適化問題の解として導出するためには，資本蓄積の過程を最適制御理論のタームで定式化することが要求さ

れる。

なお，本稿は以下の文献と筆者の拙論に基づいている。

(1) R. Dorfman, "An Economic Interpretation of Optimal Control Theory", *A. E. R.*, 1969.

(2) 酒井 徹「調整費用モデルの展望と問題点—企業の投資理論(1)—」北海道大学「経済学研究」，1974.

(3) T. Sakai, "Investment Behavior of the Firm and Disequilibrium Theory", *Hokudai Economic Papers*, 1975—76.

以下で用いられる記号の意味を次のように約束する。

[変数および関数]		[外生変数その他]	
Π	利潤関数	β	資本減耗率
C	投資費用関数	r	利子率
K	資本ストック	w	貨幣賃金率
I	粗投資	p	価格水準
λ	投資の帰属価格	T	計画期間
D	ヘッセ行列式	t, τ	時間
F	生産関数	$\cdot$	時間に関する変化 (例えば $\dot{K}=\frac{dK}{dt}$)

2．最大値原理

I(t)を粗投資とする。これは以下のモデルにおいて制御変数となる。Π(K)を利潤関数とすれば，t時点のキャッシュフローRは

$$\begin{aligned} R &= \Pi(K) - C(I) \\ &= R[K, I] \end{aligned} \tag{1}$$

となる。C(I)は投資費用である。資本ストックK(t)は一定の率βで減耗すると想定すれば資本蓄積量はt時点で

$$\dot{K} = I - \beta K \tag{2}$$

中古資本財市場が存在しないか，仮に存在したとしてもいったん企業に据付けられた機械は他の企業にとってほとんど価値がないとすれば，中

古価格は購入価格をかなり下回ることになり負の粗投資は無意味となる。これを投資の不可逆性 irreversibility と呼び

$$I(t) \geqq 0 \tag{3}$$

と表わす。

企業の問題は初期条件 $K(0)=K_0$の制約と(2),(3)の制約のもとで次の積分で示される企業の現在価値 W を最大化することである。

$$W=\int_0^T \alpha(t) R[K,\ I,\ t]dt$$

ここで $\alpha(t)$ は割引因子であり市場利子率 r が一定の場合には

$$\alpha(t)=e^{-rt}$$

である。以下において割引かれたネットキャシュフロー $\alpha(t)R[\quad]$を $u[\quad]$ と表わすことにすれば，目的汎関数つまり上の積分は

$$W(0)=\int_0^T u[K,\ I,\ t] \tag{4}$$

となる。

いま任意の時点 $t, 0<t<T$ から将来にわたるネットキャッシュフローの割引かれた総和を考え，それを

$$W(t)=\int_t^T u[K(\tau),\ I(\tau),\ \tau]d\tau$$

と定義する。この場合のスタート時点 t において投資量が $I(t)$ の大きさに選ばれ，その直後の短い期間 Δ だけ $I(t)$ に固定される。その時，上の積分を 2 つに分割する。

$$W(t)=u[K(t), I(t), t]\Delta+\int_{t+\Delta}^T u[K(\tau), I(\tau), \tau]d\tau$$

$W(t)$ を最大化する $I(t)$ を選ぶことによって $t+\Delta$ 時点での資本ストック $K(t+\Delta)$ は影響を受ける。仮に $t+\Delta$ 時点以後の資本蓄積経路が最適であり，Δ 期間の最適化のみが残っていると考えよう。この時最適資本ストック $K(t+\Delta)$ が $I(t)$ から受ける影響は近似式

$$K(t+\Delta)=K(t)+\dot{K}(t)\Delta$$

を用いれば

$$\frac{\partial K(t+\Delta)}{\partial I(t)} = \Delta \frac{\partial \dot{K}(t)}{\partial I(t)} \tag{5}$$

となる。

いま W(t) を V(K(t), I(t), t) とおく。V( ) の中に I(t) が含まれているのは I(t) についての最適化が終了していないことを意味するためであり，K(t)，t を含むのは積分が t 時点の資本ストック K(t) からスタートすることを示している。

$$V(K(t), I(t), t) = u[K(t), I(t), t]\Delta + V^*(K_{t+\Delta}, t+\Delta)$$

ここで V*( ) は前述したように t+Δ 時点以後では最適化が終了していることを意味している。もし I(t) についての最適化も終了したのであれば上式は全体として V*(K(t), t) となる。この時，投資の帰属価格 λ(t) を次のように定義する。

$$\lambda(t) = \frac{\partial}{\partial K(t)} V^*(K(t), t) \tag{6}$$

$$\lambda(t+\Delta) = \frac{\partial}{\partial K(t+\Delta)} V^*(K(t+\Delta), t+\Delta) \tag{7}$$

かくして，I(t) についての最適化の準備が完了した。いうまでもなく偏微分してゼロとおく通常の方法は局所的最大化でしかないが我々は簡単化のため大域的にも最大であると仮定する。すなわち

$$\Delta \frac{\partial}{\partial I(t)} u[K(t), I(t), t] + \frac{\partial}{\partial I(t)} V^*(K_{t+\Delta}, t+\Delta) = 0$$

V*( ) は I(t) を明示的に含んではいないが次の計算が成り立つ。

$$\frac{\partial V^*}{\partial I(t)} = \frac{\partial}{\partial K(t+\Delta)} V^*(K(t+\Delta), t+\Delta) \frac{\partial K(t+\Delta)}{\partial I(t)}$$

これと(5)，(7)を代入すれば

$$\Delta \frac{\partial}{\partial I(t)} u[K(t), I(t), t] + \Delta\lambda(t+\Delta) \frac{\partial \dot{K}(t)}{\partial I(t)} = 0 \tag{8}$$

となるが，Δ は消去される。

再び近似により

$$\lambda(t+\Delta) = \lambda(t) + \dot{\lambda}(t)\Delta$$

これを(8)式に代入すると

$$\frac{\partial u}{\partial I}+\lambda(t)\frac{\partial \dot{K}}{\partial I}+\dot{\lambda}(t)\Delta\frac{\partial \dot{K}}{\partial I}=0$$

最後に定数Δをゼロに近づけていけば第3項は無視されうる。その結果，最大値原理に到達する。

最大値原理（i）

$$\frac{\partial u}{\partial I}+\lambda\frac{\partial \dot{K}}{\partial I}=0 \tag{9}$$

いまや，Iは(9)式を満足するように決定されているものとする。その時，W(t)あるいは同じことであるがV(K(t), I(t), t)はV*(K(t), t)に等しい最大可能値 maximum possible value であり，前述したように

$$V^*(K(t),t)=u[K(t),I(t),t]\Delta+V^*(K_{t+\Delta},t+\Delta)$$

である。このようにIについて最大化が終っている上式を資本ストックKに関して微分する。ここでλの定義(6)，(7)を考慮すれば

$$\lambda(t)=\Delta\frac{\partial u}{\partial K}+\frac{\partial}{\partial K}V^*=\Delta\frac{\partial u}{\partial K}+[\lambda+\dot{\lambda}\Delta][1+\Delta\frac{\partial \dot{K}}{\partial K}]$$

次に高次の項Δ^2を無視すれば，最大値原理の残りの公式に到達する。

最大値原理（ii）

$$-\dot{\lambda}=\frac{\partial u}{\partial K}+\lambda\frac{\partial \dot{K}}{\partial K} \tag{10}$$

このようにして(9)，(10)の2本の公式が得られたならば，次の補助関数 auxiliary function を作ってみる。

$$H=u(K(t),I(t),t)+\lambda(t)\dot{K}(t)$$

これは Hamiltonian function とも呼ばれている。この関数を利用すると最大値原理は簡単に表現される。

$$\frac{\partial H}{\partial I}=0$$

$$\frac{\partial H}{\partial K}=-\dot{\lambda}$$

そして(2)式の資本蓄積式に対応して

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{K}$$

となることが容易に知られる。

3．投資関数

このように導出された最大値原理を応用した企業の投資行動理論を紹介する。

企業は目的関数(11)を最大化するような資本蓄積経路を選択するのであるが，そのための毎時点での決定は他の時点の決定と独立ではなく，リカーシブであらねばならない。

$$W(O) = \int_0^T e^{-rt}[pF(K, L) - wL - C(I)]\,dt \tag{11}$$

(11)式は第4節で述べられるように労働投入 L を明示的には含まない利潤関数を用いた表現が可能である。

$$W(O) = \int_0^T e^{-rt}[\Pi(K) - C(I)]\,dt \tag{12}$$

ハミルトン関数を次のように定めよう。

$$H = e^{-rt}[\Pi(K) - C(I)] + \lambda[I - \beta K] \tag{13}$$

この時，最大値原理より2本の条件を得る。

$$-e^{-rt}C'(I) + \lambda = 0 \tag{14}$$

$$-\dot{\lambda} = e^{-rt}\Pi'(K) - \lambda\beta \tag{15}$$

(14)を時間で微分した結果を(15)に代入し整理すると最適経路に関する微分方程式を得る。

$$C''(I)\dot{I} - (r+\beta)C'(I) + \Pi'(K) = 0 \tag{16}$$

この式を解くことで投資関数を導出することができるのであるが，それは3つの部分から構成されている。第1は目標（長期的に最適な）資本ストック K^* であり，次式を満足する大きさでなければならない。

$$\Pi'(K^*) = (r+\beta)C'(\beta K^*) \tag{17}$$

第2は資本ストックの最適な時間経路であり，次式のような資本ストック調整式で与えられる。

$$\dot{K}=v[K-K^*] \tag{18}$$

ここで調整係数 v は負の値をとる。またそれは次式で与えられる。

$$v=\frac{r}{2}-\left[\left(\frac{r}{2}\right)^2+(r+\beta)\beta-\frac{\Pi''}{C''}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

最後の第3の部分は置換投資 βK である。かくして粗投資関数は

$$I=v[K-K^*]+\beta K \tag{20}$$

と求まる。

4．長期均衡

前節の議論の中で触れなかった点が2つある。それは(i)利潤関数と生産関数との関係，(ii)長期均衡点への収束性と収穫の可変性，であるが，これらは互いに関連している。

(i) Π と F の関係

利潤 Π は生産関数 F と次のような関係がまずあることはいうまでもない。

$$\Pi=pF(K,L)-wL \tag{21}$$

労働力 L は毎時点で最適に選択され，その選択は他の時点ごとに独立である。それゆえ，最適条件　$pF_L(K,\ L)=w$　より各時点の労働雇用量はその時点だけの資本ストック K と実質賃金率(所与と仮定される) w/p に依存して決まる。また，資本ストックの大きさが変われば $dL/dK=-F_{LK}/F_{LL}$ が労働と資本ストックとの相対的変化でなければならない。このようなルールのもとで資本ストック変化の利潤への効果を求めると次のようになる。

$$\Pi'(K)=pF_K \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\Pi''(K)&=p[F_{KK}F_{LL}-F_{LK}F_{LL}]/F_{LL}\\&=pD/F_{LL}\end{aligned} \tag{23}$$

ところで生産関数 $y=F(K,L)$ において通常想定されるのはせいぜい

$$F_K,\ F_L>0,$$
$$F_{KK},\ F_{LL}<0,$$
$$F_{LK}=F_{KL}>0,$$

という符号条件であり，ヘッセ行列式 *Hessian* D についてはその符号は特に指定されない。また指定すること自体が収穫の可変性 *variable return* を排除することに直結するため慎重でなければならない。すなわち

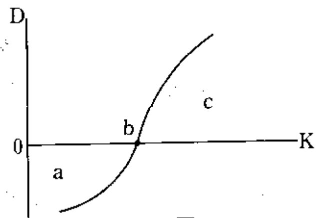
$$D=\begin{vmatrix} F_{KK} & F_{KL} \\ F_{LK} & F_{LL} \end{vmatrix} \gtreqless 0$$

しかしながら，ヘッセ行列式の符号が資本ストックの変化と共に変わることを想定することは理にかなっている。そこで，第1図にみられるように規模に対する収穫の可変性を想定する。よく知られているように a, b, c の3つの領域においては

(a) *increasing return to scale* : $D<0$

(b) *constant return to scale* : $D=0$

(c) *diminishing return to scale* : $D>0$



第1図

がそれぞれ観察される。また，それぞれの領域において利潤関数が示す2階の微係数は(23)式から明らかなように

(a) $\Pi''(K)>0$: $D<0$

(b) $\Pi''(K)=0$: $D=0$

(c) $\Pi''(K)<0$: $D>0$

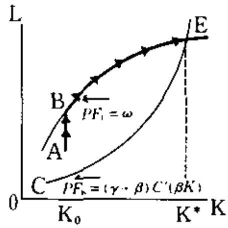
となる。経済理論では資本に対する収穫逓減を仮定として用いることがある。これは $\Pi''<0$ であり，$D>0$ と同値 *equivalent* である。またこの仮定の重要性は資本蓄積の長期均衡の存在を保証するところにある。

(ii) 長期均衡の存在と *Hessian*

最適な資本蓄積経路が行きつく先の資本ストック K^* が満たすべき条件は(17)式あるいは同値な

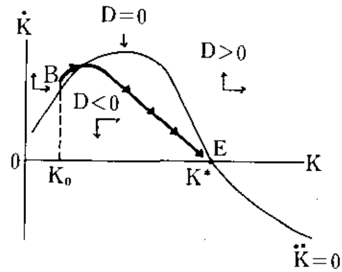
$$pF_K(K^*,L(K^*,w/p))=(r+\beta)C'(\beta K^*)$$

である。この条件は計画期間の終りまでは満足されることはない。いま(K, L)平面に最適経路の典型を書いてみると第2図の太い矢印のようになろう。初期の資本ストックK_0のもとでA点で示される雇用量は即時的に調整されB点へとジャンプする。資本の調整は調整費用の存在のため緩慢であり，BE 間を徐々にスピードを落しながら進んで行く。やがて CE 線と BE 線が交わるところで純投資は止む。ここで重要なのは2つの右上り曲線が交わるための条件である。CE 線が BE 線より急勾配であることが少なくとも E 点の周辺では要求される。もし *Hessian* D がプラスであれば必らず交点が存在し，その意味で長期均衡は存在する。そして(19)に示されるように調整係数は負の値をとるから長期均衡へ収束することが同時にわかるのである。



第2図

このことを別の角度から考えるために$(K, \dot{K})$平面に位相図を書いてみる。このとき，特異曲線$(\dot{K}=0)$の勾配の符号と *Hessian* の符号とが正反対であることを知る。すなわち逆U字型となる特異曲線において右下り部分は$D>0$となっており，その部分に長期均衡が位置するのである。



第3図

5．むすび

今日，マクロ経済学のミクロ的基礎付けが広汎に展開されているが，投資関数に関する研究は先行グループに属していると言えよう。それは1960年のホーベルモーの問題提起を受けて10年の間にほぼ完成されたといってよい。然るに，マクロ経済学の他の主要部分との斉合的接合が残るのみであるが，未だに満足な成果をみるには到っていない。とりわけ，市場不均衡のもとにおける企業の異時的行動（在庫の保有を含む）の分析は焦眉の急を要するといえる。最適制御理論が今後の課題の解明に役

に立つことを予想するならば，過去の研究成果の一端を書き留めておくことも強ち無駄ではなかろう。