

知能作用過程のシュミレーション

その7 所屬度関数に基く文字の識別と「あいまいさ」の理論的考察

寺岡 宏 *矢吹哲夫

Simulation of the Operating-Processes of the Human Intellect

Part 7. Discrimination of letters based on membership function of fuzzy set and theoretical study of the obscurity involved in the form of the letters

Hiroshi Teraoka and Tetuo Yabuki

In this paper, we try to discriminate among several kinds of letters, by using the membership functions indispensable means in a fuzzy set theory.

First of all, the general foundation of fuzzy concepts was investigated in the section A. Then we formulated the several necessary conditions which should be satisfied by any membership function.

Secondly, we constructed the concrete definitions of the several membership functions, under the conditions imposed in the section A. In the section B, the two kinds of letters, V and L, were selected and discrimination between them was carried out by the corresponding membership functions. In the section C, discrimination of V, L and U was carried out by the corresponding membership functions. In both sections, the pictures and graphes of calculation results were given.

Finally we discuss about our assumed principles ($0 \leq \mu_{A1} + \mu_{A2} + \dots + \mu_{An} \leq 1$), referring the previous typical works in which the membership functions of union and intersection sets were defined.

本研究シリーズ前報¹⁾において、われわれは文字読み取りと認知のモデルの中に「あいまいさ」を導入した。その際、今日「あいまいさ」を解析する数学的道具だてとして定着しつつある「ファジー集合」の概念に立脚し

た。

本論文では、文字の識別・同定という作業の中に、ファジー概念の具体化を試みる。まず複数の変数によって規定される文字空間を設定し、その変数空間から実数空間 $[0, 1]$ への写像として、あらかじめ選定された文字の所屬度関数（メンバーシップ関数）を定義

*北海道大学・理学部・物理学科・大学院博士課程

する。はじめにセクションAで、複数の文字があるときの所属度関数構成の一般論を議論し、続くセクションB、Cでその具体的適用を試みる。セクションBでは、V、Lという2つの文字を識別すべき文字として選定し、2本の線分長 a_1, a_2 および2つの角 θ_1, θ_2 の4つの分類変数の関数として、V、L各々の所属度関数を構成する。そして、この4つの変数を様々に変えたときの所属度をコンピュータで計算しグラフ化した。この結果をふまえて、次のセクションCでは同様に文字Uも含めたV、L、Uの3つの文字を識別すべき文字として選定し、各々の文字に対応する所属度関数を構成した後、その計算結果をグラフ化した。さいごに、セクションDで、まとめと今後の課題を述べる。

A. 複数の文字があるときの所属度関数（その一般論）

A-1：はじめに、複数の分類変数によって規定される文字の字形空間を全体集合Xとして、N個の文字 $A_1, A_2 \dots A_N$ をその全体集合X上で定着されるファジー集合とする。以下、これら各々の所属度関数を順に $\mu_{A_1}, \mu_{A_2}, \dots, \mu_{A_N}$ と書く。

n個の分類変数があるとして、それらを $x_1, x_2 \dots x_n$ と書くと、全体集合X（字形空間）はこれらn個の変数のつくるn次元空間と見なされる。そして、各所属度関数 μ_{A_i} ($i=1, 2, \dots, N$) は、n個の分類変数 $x_1, x_2 \dots x_n$ の多変数関数として規定される。それらを $\mu_{A_i}(x_1, x_2 \dots x_n)$ ($i=1, 2, \dots, N$) と書くと、これらは所属度関数の定義に基づく基本条件として、

$$0 \leq \mu_{A_i}(x_1, x_2 \dots x_n) \leq 1 \dots\dots\dots(1)$$

$$(i=1, 2, \dots, N)$$

を満たしていなければならない。

ここで、更にわれわれは、「あいまいさ」がないときのN個の文字 $A_1, A_2 \dots A_N$ が互い

に排反的、則ちN個の文字が同時成立しないということの自然な延長として、ファジー化された集合 $A_1, A_2 \dots A_N$ の所属度関数に対して次の要請を課す。

文字 $A_1, A_2 \dots A_N$ のうちどれか1つの所属度が1のときは、他の文字の所属度はすべて0

$$\text{則ち、} \mu_{A_i} = 1 \rightarrow \mu_{A_j} = 0 (j \neq i) \dots\dots\dots(2)$$

この要請の必然性については、本論文セクションDのまとめと今後の課題の中でのべる。

本論文においては、上の要請を満たす十分条件として次の条件を課する。

$$0 \leq \mu_{A_1} + \mu_{A_2} + \dots + \mu_{A_N} \leq 1 \dots\dots\dots(3)$$

条件(1)の下で、条件(3)が上の要請(2)を満たすことは明らかである。ただし逆は必ずしも成り立たない。よって(3)は上記要請(2)の十分条件である。

ここで、条件(3)のもつ意味を更に明確にするために、より基本的な原理から(3)を導出することを考える。

はじめに次の2つを原理として仮定する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{仮定 1. } \mu_{\phi} = 0 \text{ (恒等関数) (}\phi \text{...空集合)} \\ \text{仮定 2. } \mu_{A \cap B} = \mu_A + \mu_B - \mu_{A \cup B} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} A \cap B \dots A, B \text{ の共通集合} \\ A \cup B \dots A, B \text{ の和集合} \end{array} \right]$$

以下この仮定を原理とすることの根拠をA-2、A-3項において説明する。

A-2：仮定 1. $\mu_{\phi} = 0$ について

仮定1の意味するところは、「空集合 ϕ の所属度関数は恒等的に0になる。」ということである。

空集合という概念は全体集合の概念とともに、絶対的な意味をもつものであり、「どの要素（全体集合の中の）も空集合には属さない。」ということが、空集合の定義である。もし、ファジー化することにより、空集合 ϕ

の所属度関数 μ_x に 0 でない値を与える、ある要素 x_0 があつたとすると、この要素 x_0 は空集合中への所属度をもつことになり、空集合という概念に矛盾する。よつて μ_x は常に 0 となる。

別の角度から次のような議論で同じ結果を導出することもできる。

集合論の基本定義から空集合 ϕ と全体集合 X とは互いに補集合の関係にある。ここで、前報¹で述べたように、所属度関数の基本条件として次式が成立しているとする。

$$\mu_x = 1 - \mu_{\bar{A}} \quad (\bar{A} \cdots A \text{ の補集合}) \quad \cdots \cdots (4)$$

これから

$$\mu_{\phi} = 1 - \mu_x \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

が成り立つ。

(5)式から、 μ_{ϕ} が恒等的に 0 であることと、 μ_x が恒等的に 1 であることは同値であると分かる。

そこで以下、全体集合 X の所属度関数 μ_x が恒等的に 1 であることが自然な要求であることを示す。

今仮に「 μ_x が恒等的に 1 である。」が成り立っていないとする。このとき、ある要素 x_0 があつて $\mu_x(x_0) \neq 1$ である。ところが、所属度関数の基本条件(1)の $0 \leq \mu \leq 1$ より、 $\mu_x(x_0) < 1$ となる。これは、要素 x_0 が全体集合 X に属するかどうか「あいまい」になっていることを示す。則ち全体集合の境界線自体が「あいまい」になっていることとあり、全体集合自体がファジー集合になっていることを意味する。そういう状態も一般的には考えられ得るが、本論文のように文字の識別・同定の問題を扱かう際は、「全体集合＝識別を受ける字形の全対象」であるから全体集合の境界線が「あいまい」になることは、そのまま識別を受ける全対象の境界が「あいまい」になることを意味する。ところが、ある対象（字形）が識別を受けるという

ことは、その対象の所属度関数が定義されることと同じであるから、識別を受けるかどうか「あいまい」になることは、則ち所属度関数が定義されるかどうか「あいまい」になるということである。そういう「あいまいさ」は、たとえあつたとしても、通常の所属度関数に基く現在のファジー理論の枠を越えるものである。

よつて、全体集合 X に対して

$$\mu_x = 1 \quad (\text{恒等的に}) \quad \text{が要求される。}$$

このとき、(5)より

$$\mu_{\phi} = 1 - \mu_x = 0 \quad (\text{恒等的に})$$

が導かれる。

A-3 : 仮定 2. $\mu_{A \cap B} = \mu_A + \mu_B - \mu_{A \cup B}$ について

通常の集合論においては、周知のように集合の要素の個数に関する次の関係式が成り立っている。

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) \quad \cdots (6)$$

($n(A)$ … 集合 A の要素の個数)

この関係式(6)の n をファジー集合の所属度関数 μ で置き換えることによって表記の式の仮定 2 が導出される。

ここで論じた限りにおいては、仮定 2 は仮定 1 のような強い必然性を有さない。ただし、今日までファジーの和集合、共通集合の所属度関数について提唱されてきた代表的な関数のクラスの中に仮定 2 を満たすものが 2 つ以上存在している。これについては、最後にセクション D で論じる。

次に仮定 1、2 から(3)が導出されることを示す。

今簡単のために $N = 2$ の場合で考える。

($N \geq 3$) の場合も同様に議論できる。

このとき、文字は 2 種類でそれを A_1 と A_2 としよう。ファジー化される前においては

A_1 と A_2 が互いに排反(同時成立しない。)であることより

$$A_1 \cap A_2 = \phi$$

よって仮定1より

$$\mu_{A_1 \cap A_2} = \mu_{\phi} = 0 \dots \dots \dots (7)$$

次に仮定2より

$$\mu_{A_1 \cap A_2} = \mu_{A_1} + \mu_{A_2} - \mu_{A_1 \cup A_2} \dots \dots \dots (8)$$

(7)と(8)へ代入して

$$0 = \mu_{A_1} + \mu_{A_2} - \mu_{A_1 \cup A_2}$$

$$\therefore \mu_{A_1 \cup A_2} = \mu_{A_1} + \mu_{A_2}$$

所屬度関数の基本性質(1)より

$$0 \leq \mu_{A_1 \cup A_2} \leq 1$$

$$\therefore 0 \leq \mu_{A_1} + \mu_{A_2} \leq 1$$

よって(3)式が成り立つ

以上の議論によって、仮定された2つの仮定1, 2から次の条件式(3)が導かれた。

$$0 \leq \mu_{A_1} + \mu_{A_2} + \dots + \mu_{A_n} \leq 1 \dots (3)$$

以下本論文では、この不等式(3)を指針の一つとして、所屬度関数を具体的に構成していく。

B. 2文字V, Lを識別する所屬度関数

本項は前項セクションAの一般論において、文字数 $N=2$ とした場合であり、 A_1, A_2 がV, Lに対応する。

V, Lの所屬度関数を各々 μ_V, μ_L とすると、セクションAの議論から、これらが満たすべき条件として次の3式が課せられる。

$$(1)より \quad 0 \leq \mu_V \leq 1 \dots \dots \dots (9)$$

$$0 \leq \mu_L \leq 1 \dots \dots \dots (10)$$

$$(3)より \quad 0 \leq \mu_V + \mu_L \leq 1 \dots \dots \dots (11)$$

μ_V, μ_L を具体的に構成するために、まず全体集合(文字形)を規定するための分類変数を次のように設定する。

図1のように、2つの線分 a_1, a_3 と2つの角 θ_1, θ_3 を分類変数として採用する。ただし以下角 θ_1, θ_3 の単位はラジアン(rad)とする。

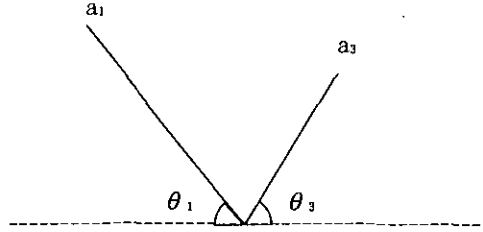


図1 4つの分類変数

このとき、文字形の全体集合Xは次のように規定される。

$$X = \{ (a_1, a_3, \theta_1, \theta_3) \mid a_1, a_3 > 0, -\pi < \theta_1, \theta_3 < \pi, |\theta_1 + \theta_3| < \pi \}$$

そして、 μ_V, μ_L は $a_1, a_3, \theta_1, \theta_3$ の4変数関数として定義される。

次にVとLの理想的な文字形(プロトタイプ)を次のように定める。

◦ Vのプロトタイプ

$$a_1 = a_3 \text{ かつ } \theta_1 = \frac{\pi}{3} \quad \theta_3 = \frac{\pi}{3}$$

のときに限って

$$\mu_V = 1 \text{ とする}$$

◦ Lのプロトタイプ

$$a_1 = 2a_3 \text{ かつ } \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \theta_3 = 0$$

のときに限って

$$\mu_L = 1 \text{ とする}$$

条件(8), (10), (11)を満たし、上記プロトタイプの場合に合致する μ_V, μ_L を次式で構成した。

$$\begin{aligned} &\circ \mu_V(a_1, a_3, \theta_1, \theta_3) \\ &= \theta (\cos \alpha) \cos^2 \alpha \\ &\quad \cdot \exp\left[-\left(\frac{2}{3}\pi - \theta_1 - \theta_3\right)^2 / \sigma_1^2\right] \\ &\circ \mu_L(a_1, a_3, \theta_1, \theta_3) \\ &= \theta (\sin \alpha) \sin^2 \alpha \\ &\quad \cdot \exp\left[\left\{-\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 - \theta_3\right)^2\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ \left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right)^2\right\} / \sigma_2^2\right] \\ &\quad \cdot \exp\left[-\left(\frac{a_1 - 2a_3}{a_1}\right)^2\right] \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

ただし

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{|a_1 - a_3|}{a_1 + a_3} \times \frac{3}{4} \pi + \frac{3}{2} |\theta_1 - \theta_3| \right) \text{ とし、}$$

$\theta(x)$ はステップ関数と呼ばれ次式で定義される。

$$\theta(x) = \begin{cases} =1 & (x \geq 0) \\ =0 & (x < 0) \end{cases}$$

ここで、(12)式で定義した μ_v, μ_L が(9)、(10)、(11)及びV、Lのプロトタイプの条件を満たしていることを以下に示す。

$$\begin{cases} 0 \leq \cos^2 \alpha \leq 1 \\ 0 \leq \sin^2 \alpha \leq 1 \\ 0 \leq \exp(-x^2) \leq 1 \quad \text{より} \end{cases}$$

(9)、(10)の $0 \leq \mu_v \leq 1, 0 \leq \mu_L \leq 1$ は明らかである。

次に(11)の $0 \leq \mu_v + \mu_L \leq 1$ 、についてであるが、

$$0 \leq \mu_v + \mu_L \text{ は明らか、} \\ (\because \mu_v \geq 0, \mu_L \geq 0 \text{ より})$$

$$\text{また } \mu_v + \mu_L \leq \theta(\cos \alpha) \cos_2 \alpha + \theta(\sin \alpha) \sin_2 \alpha \leq 1 \\ \therefore \mu_v + \mu_L \leq 1$$

よって(11)が成り立っている。

次に、前述のプロトタイプの条件が満たされていることのチェックをする。

・Vについて

$$(12) \text{ の } \mu_v = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ かつ } \theta_1 + \theta_3 = \frac{2}{3} \pi$$

更に $\alpha = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_3$ かつ $\theta_1 = \theta_3$ より

結局

$$\mu_v = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_3 \\ \theta_1 = \theta_3 = \frac{\pi}{3} \text{ となり} \end{cases}$$

設定したVのプロトタイプの条件に合致している。

・Lについて

(12)の μ_L の定義式より

$$\mu_L = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ かつ } \theta_1 + \theta_3 = \frac{\pi}{2} \text{ かつ}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \text{ かつ } a_1 = 2a_3$$

$$(\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ となるのは } 0 \leq \alpha \leq \frac{9}{8} \pi \text{ より})$$

上記右側後半の3つの条件式より

$$\begin{cases} a_1 = 2a_3 \\ \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_3 = 0 \end{cases}$$

これらを α の定義式に代入すると、

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ となり、矛盾しない。よって}$$

$$\mu_L = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2a_3 \\ \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_3 = 0 \end{cases}$$

となり設定したLのプロトタイプの条件に合致している。

以上により(12)式で構成、定義した μ_v, μ_L が所定の条件(5)、(6)、(7)及びV、L各々のプロトタイプの条件を満足していることが確かめられた。

(12)式でもう一つ重要なことは、 μ_v, μ_L の表式の中に線分 a_1, a_3 が比の形で入っていることである。このことが、字形の相似拡大・縮小に対して、 μ_v, μ_L が不変であることを保証している。これは、文字の識別が形のみより、大きさによらないことからくる当然の条件である。

次にこの μ_v, μ_L の値が、分類変数 $a_1, a_3, \theta_1, \theta_3$ を様々に変えることにより、どのように変化するかをコンピュータで計算し、以下その結果を図及びグラフで示す。ただし、 μ_v, μ_L の定義式(12)の中の分散 σ_1, σ_2 は共に $\frac{1}{2}$ とした。

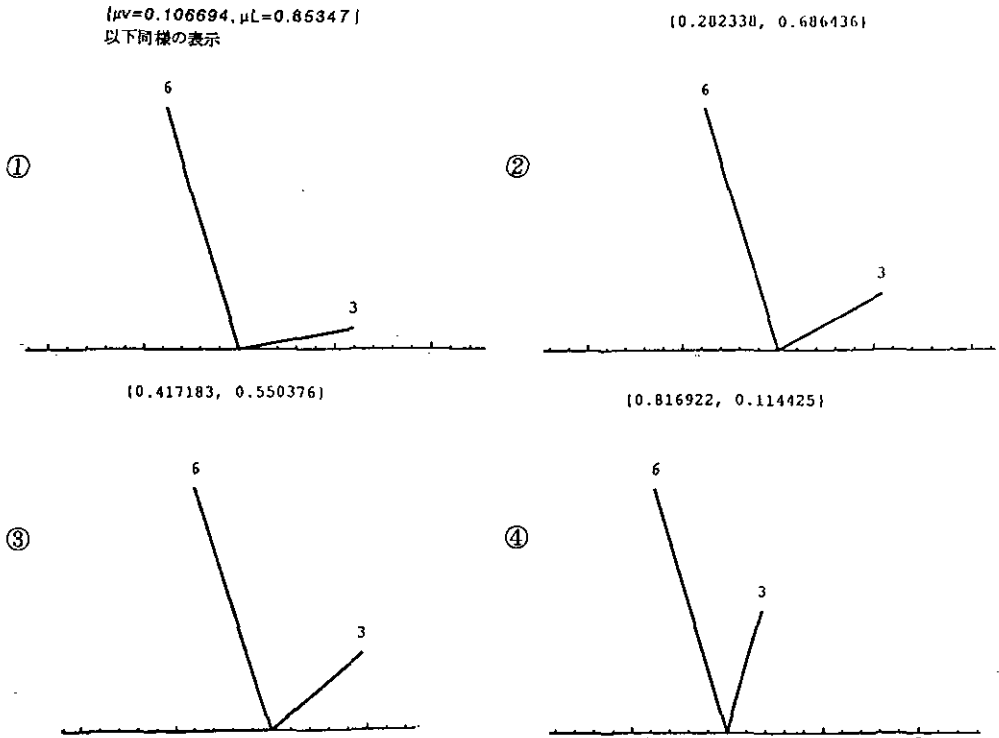


図2 シリーズ (I) : $\{\mu_v, \mu_L\}$ の値

・シリーズ (I)

上の図2は、

$$\begin{cases} a_1 = 2a_3 \\ \theta_1 = \frac{\pi}{3} \end{cases} \text{ と保ったまま、} \theta_3 \text{ を変化させたときの図である。各図の上の } \{ \} \text{ の中の数字は、左から順に、} \mu_v, \mu_L \text{ の値を示している。この図から、2本の線分のなす角 } \theta_2 = \pi - (\theta_1 + \theta_3) \text{ の値が小さくなるにつれ、L成分 } \mu_L \text{ が減少し、V成分 } \mu_v \text{ が増大しているのが分かる。}$$

・シリーズ (II)

$$\text{図3は、} \begin{cases} \theta_2 = \pi - (\theta_1 + \theta_3) = \frac{\pi}{2} \\ a_1 = 2a_3 \end{cases}$$

を保ったまま、 θ_1 を変化させたときの図

及びグラフである。

$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ のときは、Lのプロトタイプに合致するので $\mu_v = 0$ 、 $\mu_L = 1$ となっている。①と⑤、②と④の各々の組で μ_L の値は等しいのは、式(12)で μ_L を定義する際、Lのプロトタイプから左右どちらに回転しても、識別の度合いは同等であるように設定されていることを反映している。一方 μ_v の方は、①、②からLのプロトタイプから左へ回転するにつれ若干ながら増大しているのが分かる。これはVのプロトタイプの字形から当然であり、そのように、(12)式で μ_v が定義されていることの検証といってよい。一番右下のグラフは、 θ_1 の変化に対する μ_L の変化のグラフである。先述したように、 μ_L がLのプロトタイプ

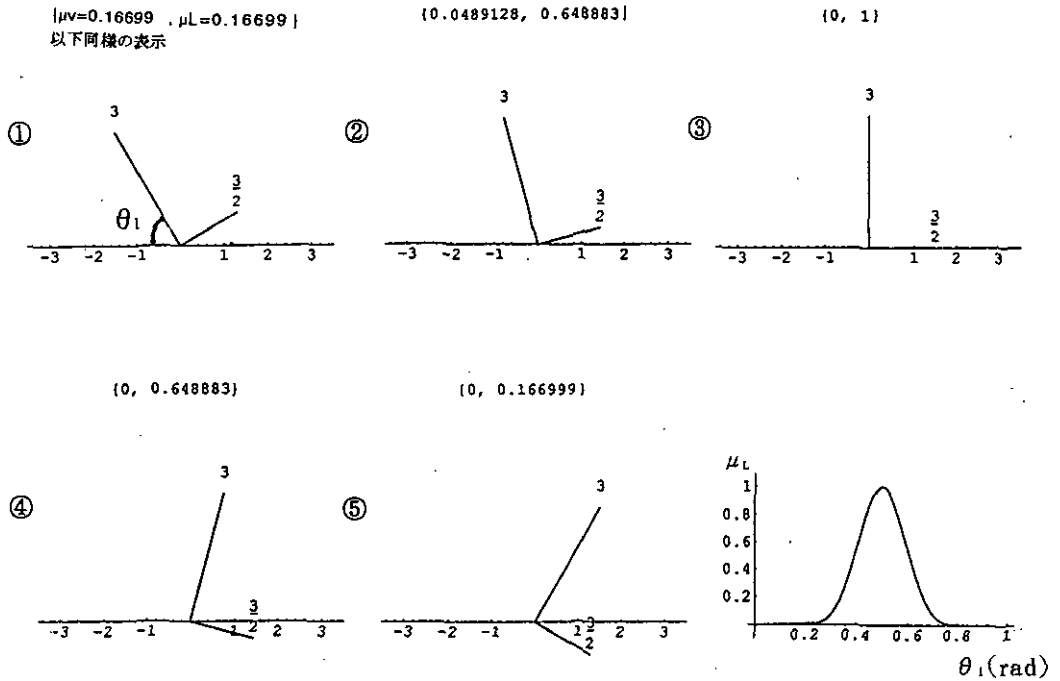


図3 シリーズ(Ⅱ): $\{\mu_v, \mu_L\}$ の値

($\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$) からの回転の向きに依らないことにより、 $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ (このとき $\mu_L = 1$) を軸として、左右対称なグラフになっている。

・シリーズ(Ⅲ)

図4は、
$$\begin{cases} a_2 = 3 \\ \theta_1 = \theta_3 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

を固定して、 a_1 を変化させたときの図及びグラフである。①と⑤、②と④の各々の組は、互いに左右反転の関係にある図の組であるが、これらの組で μ_v の値が等しくなっている。これは⑫の μ_v の定義式が a_1 と a_3 の入れ換えに対して不変であることの結果であり、Vのプロトタイプが左右対称であることを反映させたものである。右下のグラフは、 a_1 に対する μ_v の変化のグラフである。これを見ると、 μ_v の値は、Vのプロトタイプ条件で

ある $a_1 = 3$ のときの $\mu_v = 1$ からそれほど大きく減少していない。これは逆に言うと、⑫で μ_v を定義する際、左右対称性の条件により大きなウェイトを置いた結果とってよい。ただし、厳密には、 a_1 が十分小さいところでは $\mu_v = 0$ となるはずであるが、今は a_1 は一定以上の長さともっているときのみを考えている。

・シリーズIV

図5は、
$$\begin{cases} a_1 = a_3 \\ \theta_1 + \theta_3 = \frac{2}{3}\pi \end{cases}$$
 を保って、左右に少しずつ回転したときの図及びグラフである。①と④、②と③は各々左右反転の関係にある図の組み合わせであるが、これらの組で μ_v の値が等しいのは、シリーズ(Ⅲ)のときと同様に、Vのプロトタイプの左右対称性を反

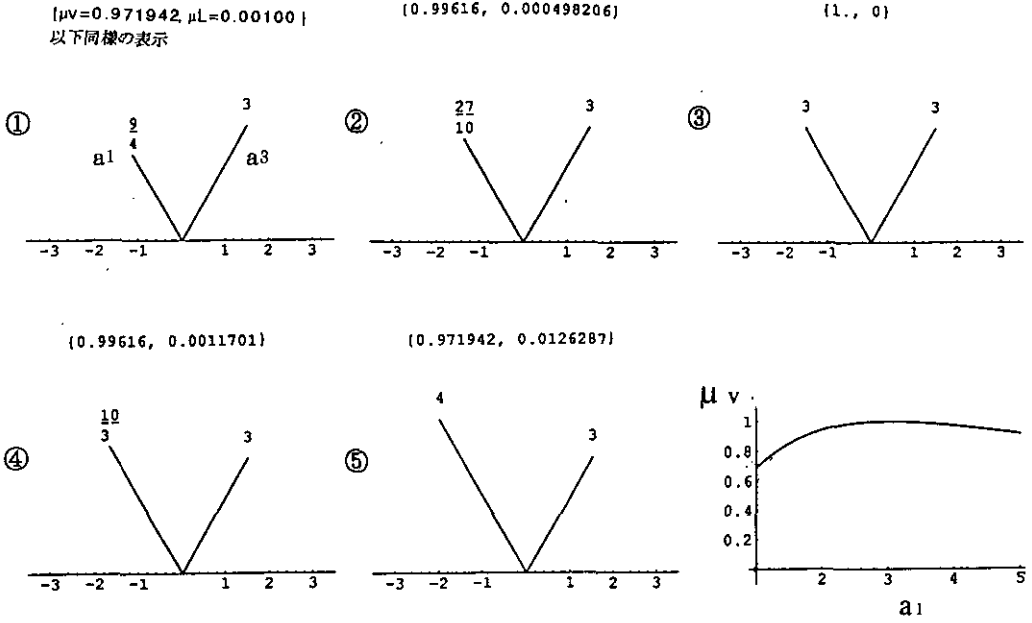


図4 シリーズ(Ⅲ): $\{\mu_V, \mu_L\}$ の値

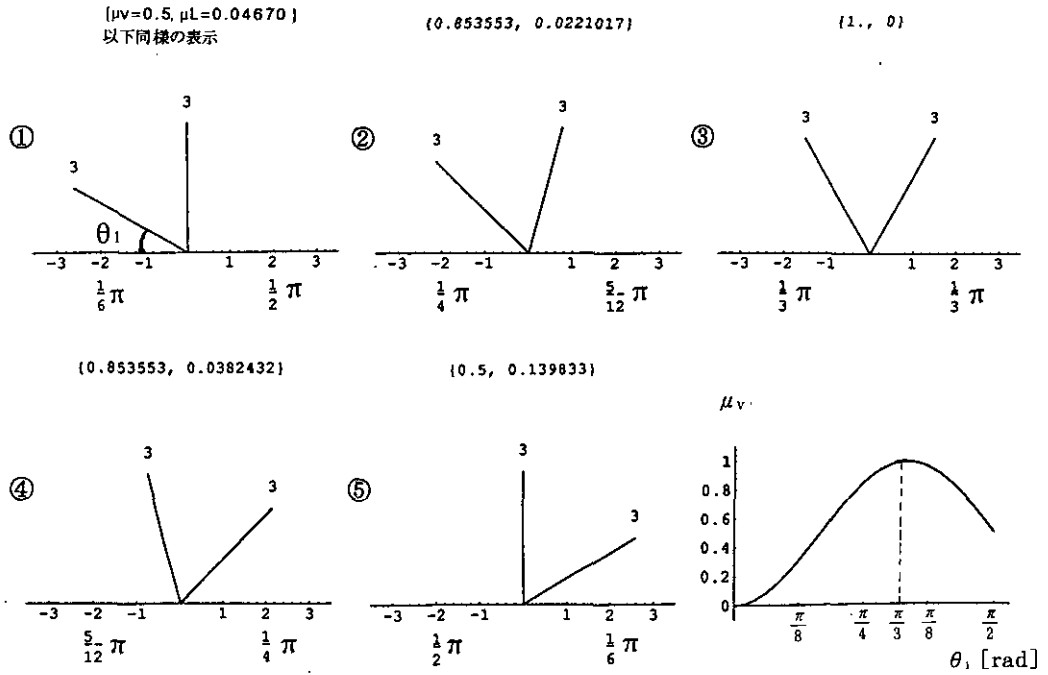


図5 シリーズ(Ⅳ): $\{\mu_V, \mu_L\}$ の値

映させた結果である。このことは、(12)の μ_v の定義式で θ_1 と θ_3 を $\theta_1 + \theta_3$ の形に入れることにより実現している。右下のグラフは、 θ_1 に対する μ_v の変化のグラフである。 $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ のときがVのプロトタイプなので $\mu_v = 1$ となっている。

最後に、2つの分類変数を同時に変化させたときの所属度関数のグラフ化を行った。

下図、図6、図7、図8、は $\{\theta_1 = \theta_3, a_1 = 2\}$ と固定して、 a_3 及び $\theta_1 (= \theta_3)$ を独立に変えたときの μ_v の変化を3次元的にグラフ化したものである。図6から順に、正面図、斜め上方からの鳥瞰図、側面図である。正面図から、 $a_3 = 2$ で μ_v の最大値1が読み取れ、側面図から $\theta_1 = \frac{\pi}{3} (= \theta_3)$ で、 μ_v の最大値1が読み取れる。

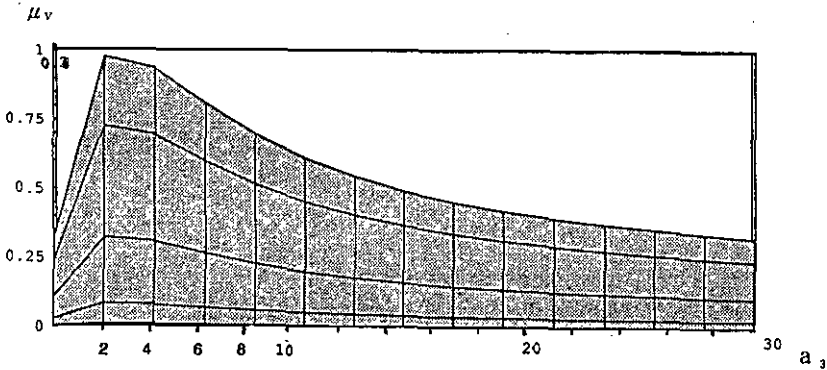


図6 μ_v の正面図

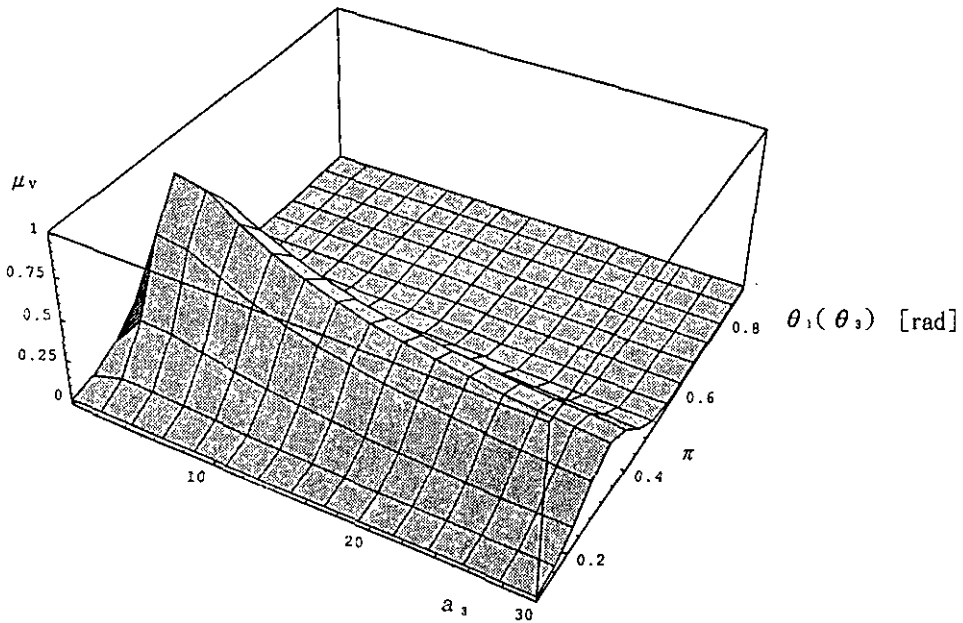


図7 μ_v の鳥瞰図

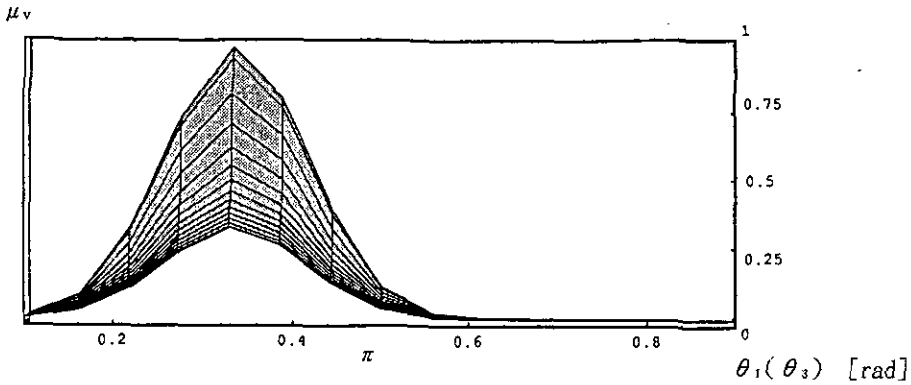


図8 μ_v の側面図

C. 3文字V、L、Uを識別する所属度関数

セクションAの一般論において、文字数 $N=3$ として、 A_1, A_2, A_3 がV、L、Uに対応する場合を以下考察する。

V、L、Uの所属度関数を各々 $\tilde{\mu}_v, \tilde{\mu}_l, \tilde{\mu}_u$ とすると（Bの議論と区別するために \sim を付した。）、これらの満たすべき条件は次の4つである。

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \tilde{\mu}_v \leq 1 \dots\dots\dots(13) \\ 0 \leq \tilde{\mu}_l \leq 1 \dots\dots\dots(14) \\ 0 \leq \tilde{\mu}_u \leq 1 \dots\dots\dots(15) \\ 0 \leq \tilde{\mu}_v + \tilde{\mu}_l + \tilde{\mu}_u \leq 1 \dots\dots\dots(16) \end{array} \right.$$

ここで(13)(14)(15)は所属度関数の基本条件(1)に基づき、(16)はセクションAで要請した条件(3)に基づく。

μ_v, μ_l, μ_u の定義を具体的に構成するために、はじめに全体集合（文字形）を規定する分類変数を図9のように設定する。

図9で、分類変数は、3つの線分長 a_1, a_2, a_3 と2つの角 θ_1, θ_3 の合計5個である。これは前項Bで議論したVとLの2文字だけのときに比べて、中央の線分長 a_2 を新たに加えたものである。このとき文字形の全体集合 X は次のように規定される。

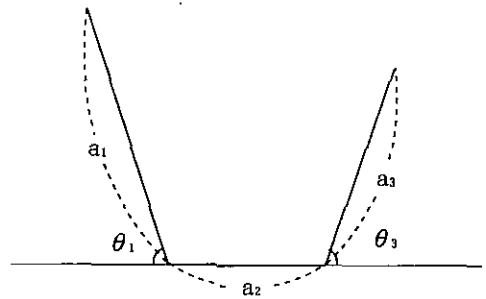


図9 5個の分類変数

$$X = \left\{ (a_1, a_2, a_3, \theta_1, \theta_3) \mid \begin{array}{l} a_1, a_2, a_3 > 0 \\ -\pi < \theta_1, \theta_3 < \pi \mid \theta_1 + \theta_3 < \pi \end{array} \right.$$

そして、 $\tilde{\mu}_v, \tilde{\mu}_l, \tilde{\mu}_u$ は $a_1, a_2, a_3, \theta_1, \theta_3$ の5変数関数となる。これら $\tilde{\mu}_v, \tilde{\mu}_l, \tilde{\mu}_u$ は、上記(13)~(16)の条件を満たすとともに、 $a_2=0$ で、 μ_v, μ_l が前項Bで定義した μ_v, μ_l と一致しなければならない。何故ならば、 $a_2=0$ のときはUの所属度 μ_u は0とするのが妥当であり、その結果 $a_2=0$ ではVとLの2文字の識別に還元されるからである。よって次の条件が課せられる。

$$a_2=0 \text{ で } \tilde{\mu}_v = \mu_v, \tilde{\mu}_l = \mu_l \dots\dots\dots(17)$$

さらに、V、L、Uのプロトタイプの場合

を課す。V、LについてはセクションBで与えているので、ここではUのプロトタイプの、設定のみを記す。

$$\begin{cases} a_1 = a_3 = \frac{7}{5} a_2 \\ \theta_1 = \theta_3 = \frac{\pi}{3} \end{cases} \text{のときに限って}$$

⇕

$\mu_v = 1$ とする。

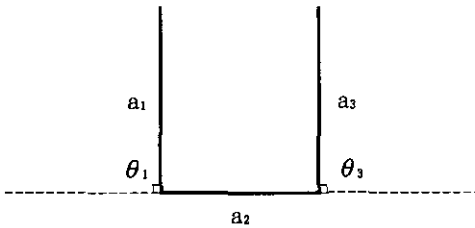


図10 Uのプロトタイプ

以上(13)~(17)の5つの条件及びプロトタイプの条件のすべてを満たす $\tilde{\mu}_v$ 、 $\tilde{\mu}_L$ 、 $\tilde{\mu}_U$ として、次の定義式を構成した。

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_v(a_1, a_2, a_3, \theta_1, \theta_3) &= \cos^2\left(\frac{7}{5}\pi \cdot \frac{a_2}{a_1 + a_3}\right) \\ &\cdot \theta\left(\cos\left(\frac{7}{5}\pi \cdot \frac{a_2}{a_1 + a_3}\right)\right) \\ &\cdot \mu_v(a_1, a_2, \theta_1, \theta_3) \\ \tilde{\mu}_L(a_1, a_2, a_3, \theta_1, \theta_3) &= \delta(a_2) \mu_L(a_1, a_2, \theta_1, \theta_3) \\ \tilde{\mu}_U(a_1, a_2, a_3, \theta_1, \theta_3) &= \sin^2\left(\frac{7}{5}\pi \cdot \frac{a_2}{a_1 + a_3}\right) \\ &\cdot \theta\left(\sin\left(\pi \frac{7}{5} \cdot \frac{a_2}{a_1 + a_3} a_2\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cdot \exp\left[-|\theta_1 - \theta_3| - \frac{|a_1 - a_3|}{a_2}\right] \\ &\cdot \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_3}{2}\right) \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

ただし θ 関数、及び μ_v 、 μ_L は前項Bで定義されたものである。
また $\delta(x)$ は次式で定義する。
$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$$

以下、これらの μ_v 、 μ_L 、 μ_U が先述した必要条件(13)~(17)及びプロトタイプの条件を満たしていることを順次示す。

(i) $a_2 = 0$ で $\tilde{\mu}_v = \mu_v$ 、 $\tilde{\mu}_L = \mu_L$ (17式)について
(18)の $\tilde{\mu}_v$ 、 $\tilde{\mu}_L$ の定義式に $a_2 = 0$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_v \text{ については、} & \cos 0 \cdot \theta(\cos 0) = 1 \\ \text{より} & \tilde{\mu}_v = \mu_v \\ \mu_L \text{ については、} & \delta(0) = 1 \text{ より} \\ & \tilde{\mu}_L = \mu_L \end{aligned}$$

となり明らか。

(ii) $0 \leq \tilde{\mu}_v$ 、 $\tilde{\mu}_L$ 、 $\tilde{\mu}_U \leq 1$ (13, 14, 15式)について

$0 \leq \mu_v$ 、 $\mu_L \leq 1$ 及び $\cos^2 x \leq 1$ (x は任意の実数) 等より

$0 \leq \mu_v$ 、 $\mu_L \leq 1$ は明らか。

また、 $0 < -e^{-x} \leq 1$ (x は任意の実数) 及び

$\sin \theta_1 \geq 0$ ($\because 0 \leq \theta_1 \leq \pi$ より) から、
 $0 \leq \tilde{\mu}_v \leq 1$ も明らか。

(iii) $0 \leq \mu_v + \mu_L + \mu_U \leq 1$ (16式) について

$$\begin{aligned} &\cdot a_2 = 0 \text{ のとき} \\ & \tilde{\mu}_v + \tilde{\mu}_L + \tilde{\mu}_U = \mu_v + \mu_L \leq 1 \\ &\cdot a_2 \neq 0 \text{ のとき} \\ & \tilde{\mu}_v + \tilde{\mu}_L + \tilde{\mu}_U \\ & \leq \cos^2\left(\frac{7}{5}\pi \cdot \frac{a_2}{a_1 + a_3}\right) \mu_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\sin^2\left(\frac{7}{5}\pi\cdot\frac{a_2}{a_1+a_3}\right) \\
 & \leq \cos^2\left(\frac{7}{5}\pi\cdot\frac{a_2}{a_1+a_3}\right) \\
 & +\sin^2\left(\frac{7}{5}\pi\cdot\frac{a_2}{a_1+a_3}\right) \\
 & = 1
 \end{aligned}$$

よって $a_2=0$ 、 $a_2\neq 0$ のどちらの場合も、 $\tilde{\mu}_V + \tilde{\mu}_L + \tilde{\mu}_U \leq 1$ が成立する。

更に(i)で示した $\tilde{\mu}_V$ 、 $\tilde{\mu}_L$ 、 $\tilde{\mu}_U \geq 0$ より

$$0 \leq \tilde{\mu}_V + \tilde{\mu}_L + \tilde{\mu}_U \leq 1$$

(iv) プロトタイプ条件

・Vについて

(18)の $\tilde{\mu}_V$ の定義式により、

$$\tilde{\mu}_V = 1 \Leftrightarrow [a_2 = 0$$

$$\text{かつ } \mu_V(a_1, a_3, \theta_1, \theta_3) = 1]$$

$$\Leftrightarrow a_2 = 0, a_1 = a_3, \theta_1 = \theta_3 = \frac{\pi}{3}$$

$\Leftrightarrow V$ のプロトタイプ

・Lについて

(18)の μ_L の定義式により

$$\mu_L = 1 \Leftrightarrow [a_2 = 0$$

$$\text{かつ } \mu_L(a_1, a_3, \theta_1, \theta_3) = 1]$$

$$\Leftrightarrow a_2 = 0 \text{ かつ } a_1 = 2a_3, \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_3 = 0$$

$\Leftrightarrow L$ のプロトタイプ

・Uについて

(18)の μ_U の定義式より、

$$\tilde{\mu}_U = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{7}{5}\pi \cdot \frac{a_2}{a_1+a_3} = \frac{\pi}{2}, \right.$$

$$\left. \frac{a_1-a_3}{a_2} = \theta_1 = \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\Leftrightarrow a_1 = a_3 = \frac{7}{5}a_2,$$

$$\theta_1 = \theta_3 = \frac{\pi}{2}$$

$\Leftrightarrow U$ のプロトタイプ

以上により、(18)式で定義、構成した $\tilde{\mu}_V$ 、 $\tilde{\mu}_L$ 、 $\tilde{\mu}_U$ が所定の条件(13)~(17)及びプロトタイプ条件を満足していることが確かめられた。

このときも、(18)式の中に線分 $a_1 \sim a_3$ が比の形でのみ入っていることが、 $\tilde{\mu}_V$ 、 $\tilde{\mu}_L$ 、 $\tilde{\mu}_U$ の相似拡大・縮小に対する不変性を保証している。

更に(18)式で、新たに加えたUの所属度関数 $\tilde{\mu}_U$ について付言しておく、 $\tilde{\mu}_U$ と同様に、 θ_1 、 θ_3 は $\theta_1 + \theta_3$ の形でのみ $\tilde{\mu}_U$ に入っている。このことがUの識別の度合いが左右の回転に対して同等に設定されていることを保証している。

次に、この $\tilde{\mu}_V$ 、 $\tilde{\mu}_L$ 、 $\tilde{\mu}_U$ の値が、分類変数 a_1 、 a_2 、 a_3 、 θ_1 、 θ_3 を様々に変えることにより、どのように変化するかをコンピュータで計算し、以下その結果を図及びグラフで示す。

ただし $\tilde{\mu}_V$ 、 $\tilde{\mu}_L$ の中に含まれる分散の σ_1 及び σ_3 はセクションB同様 $\frac{1}{2}$ としている。

・シリーズV

図11は、 $\theta_1 = \theta_3 = \frac{\pi}{3}$ 、 a_1 、 a_3 を $a_1 = a_3 = 3$ と固定して、 a_2 の値を漸次増大させたときの図及びグラフである。各図の上の数字は左から順に、 $\tilde{\mu}_V$ 、 $\tilde{\mu}_L$ 、 $\tilde{\mu}_U$ の値である。 $a_2 \neq 0$ のときは $\tilde{\mu}_L = 0$ と設定されているためこのシリーズでは $\mu_L = 0$ となっている。

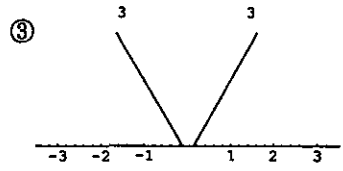
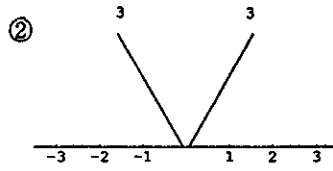
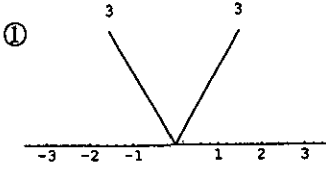
グラフ(1)は、 a_2 に対する $\tilde{\mu}_V$ のグラフである。 $a_2 = 0$ で $\tilde{\mu}_V$ は最大値1で、 a_2 の増加とともに単調に減少しているのが分かる。グラフ(2)は、 a_2 に対する $\tilde{\mu}_U$ のグラフである。 $a_1 = a_3 = 3$ と固定していることより、 $a_2 = \frac{15}{7}$ がUのプロトタイプ条件になっている。それを反映して、 $\tilde{\mu}_U$ のグラフは $a_2 = \frac{15}{7}$ で最大になっている。このとき $\tilde{\mu}_U = 1$ になっていないのは、プロトタイプ条件の残りの条件 $\theta_1 = \theta_3 = \frac{\pi}{2}$ が成立していないからである。

知能作用課程のシミュレーション

$\{\mu_V=1, \mu_L=0, \mu_U=0\}$
以下同様の表示

$\{0.893531, 0, 0.00725084\}$

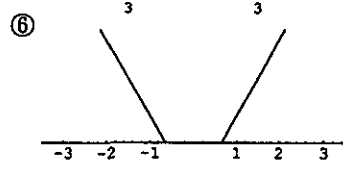
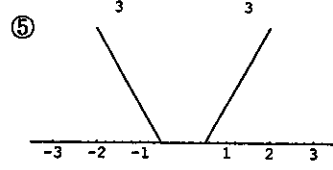
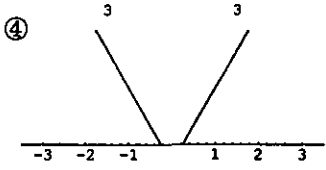
$\{0.784972, 0, 0.0287605\}$



$\{0.574576, 0, 0.111222\}$

$\{0.240013, 0, 0.387751\}$

$\{0.118337, 0, 0.566821\}$



$\{0.0446589, 0, 0.722755\}$

$\{0.00919677, 0, 0.828589\}$

$\{0, 0, 0.866025\}$

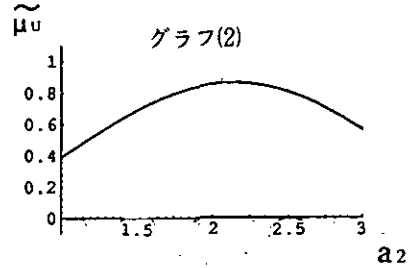
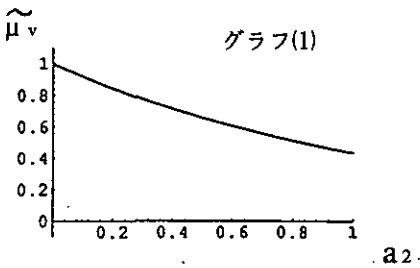
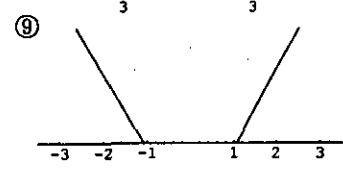
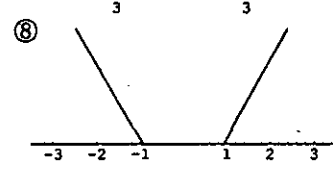
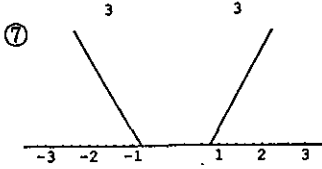


図11 シリーズ(V) $\{\tilde{\mu}_V, \tilde{\mu}_L, \tilde{\mu}_U\}$ の値

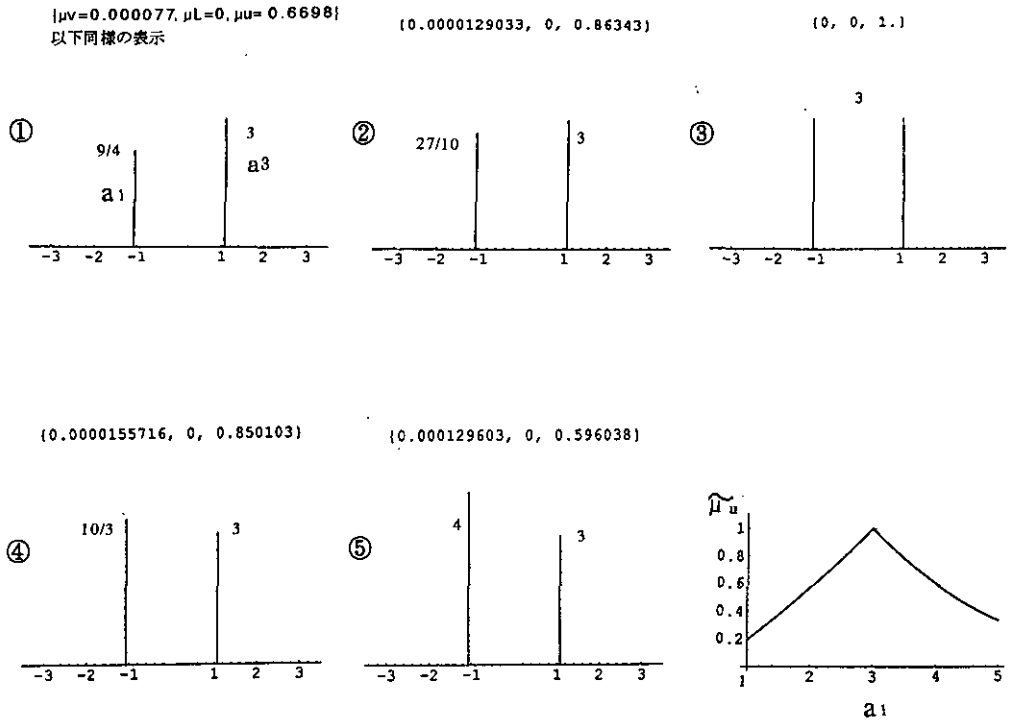


図12 シリーズ(VI) $\{\tilde{\mu}_v, \tilde{\mu}_L, \tilde{\mu}_u\}$ の値

・シリーズVI
 図12は、 $a_2 = \frac{15}{7}$ 、 $a_3 = 3$ 、 $\theta_1 = \theta_3 = \frac{\pi}{2}$ を固定して、 a_1 の値を漸次増加させたときの図及びグラフである。シリーズ(V)同様、 $a_2 \neq 0$ より $\tilde{\mu}_L = 0$ となっている。 $a_1 = 3$ のときは、「 $a_1 : a_2 : a_3 = 7 : 5 : 7$ 及び $\theta_1 = \theta_3 = \frac{\pi}{2}$ 」のプロトタイプ条件に合致して $\tilde{\mu}_L = 1$ で $\tilde{\mu}_v$ 、 $\tilde{\mu}_u$ は0となっている。②と④及び①と⑤の組は a_1 と a_3 の比を左右反転した図の組であるが、 μ_u は等しくなっていない。 a_2 を固定していることにより、これらの組の2図は相似ではないからである。右下のグラフは、 a_1 に対する $\tilde{\mu}_u$ のグラフである。プロトタイプ条件を満足させる $a_1 = 3$ のとき確かに $\tilde{\mu}_u$ は最大値1になっている。ただし、このグラフに限ってはその最大値を

とる点でグラフの滑らかさが失われている。則ち1次の微分係数が不連続になっている。しかし $\tilde{\mu}_u$ 自身は連続であるので、所属度数としての資格は失われていない。

・シリーズVII

図13は、 $a_1 = a_3$ 、 $a_2 = \frac{15}{7}$ 、 $\theta_1 = \theta_3$ の条件を保ちながら $\theta_1 (= \theta_3)$ を変えたときの図及びグラフである。 $\theta_1 = \theta_3 = \frac{\pi}{3}$ のあたりで、 $\tilde{\mu}_u$ はもう0.8を越えているのが分かる。グラフは、 $\theta_1 = \theta_3$ に対する $\tilde{\mu}_u$ のグラフである。 $\theta_1 = \theta_3$ の増加とともに $\tilde{\mu}_u$ は増大し、 $\theta_1 = \theta_3 = \frac{\pi}{3}$ のUのプロトタイプ条件のところで確かに最大値 $\tilde{\mu}_u = 1$ になっている。今は、 $0 \leq \theta_1 = \theta_3 \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で考えた。

シリーズとして図示しなかったが、(18)式の $\tilde{\mu}_u$ の定義式の中に、 θ_1, θ_3 が $\theta_1 + \theta_3$ の形でのみ入っていることから、V同様Uも左右の回転に対してその識別の度合いは同等になっている。

D. まとめと検討および課題

本論文では、具体的にV、L、Uという3つの文字を選定して、その所属度関数 μ_v, μ_l, μ_u (セクションCの文中では $\tilde{\mu}_v, \tilde{\mu}_l, \tilde{\mu}_u$ の記号を用いた。) を、あらかじめ設定された複数個の分類変数の関数として構成、定義した。その所属度関数の値を分類変数の様々な値について数値計算した結果により、3つの文字の識別を行った。そして、その識別の様子を、与えられた分類変数に対応する実際の文字形を視覚化することにより示した。

またコンピュータを用いて、着目した分類変数に対する所属度関数の依存性をグラフ化して示した。

最後に、今後の課題として次の諸点を指摘しておく。

1) 文字識別の基準には微妙な個人差があり、その点で、厳密な意味での一意的な所属度関数の構成は望み得ない。しかし、その個人差が所属度関数に含まれる少数の自由パラメータの調節によって表現され得るならば、そのとき構成・定義された所属度関数は、現実の識別に適った良い所属度関数といつてよい。例えば、式(12)及び(18)の中の分散 σ_1, σ_2 や今回は具体的な数値で与えられている複数の係数が、これら自由パラメータの例である。そこで、分類変数を様々に変えた文字形の識別の具体的な臨床実験が実現できれば、逆に

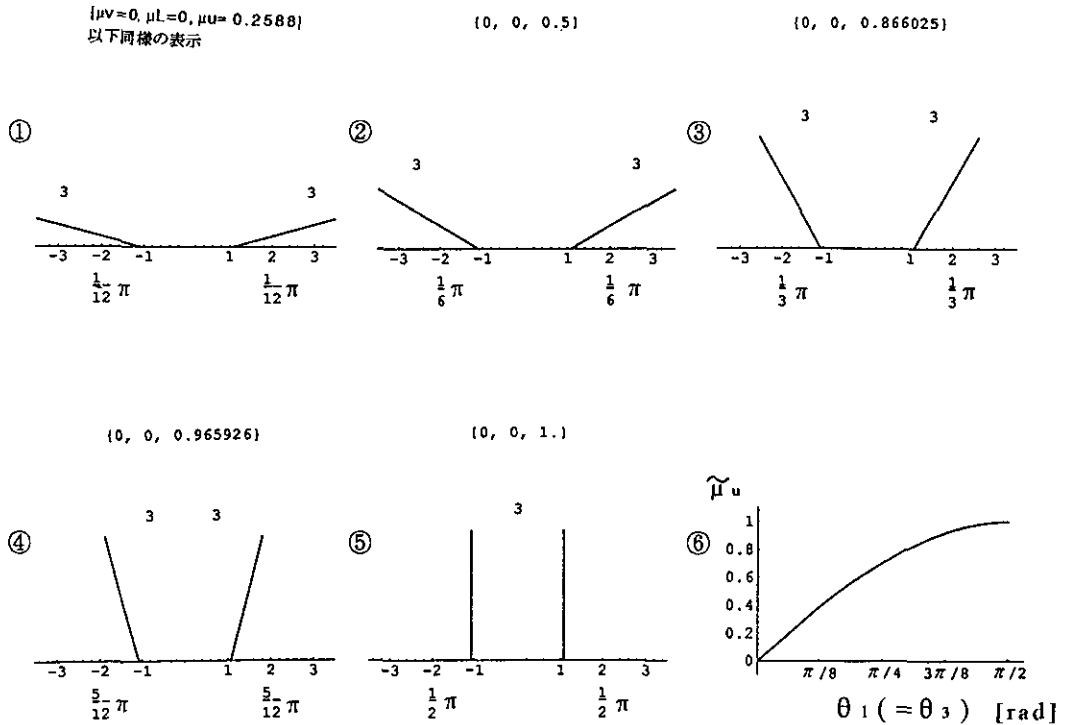


図13 シリーズ(VII) $\{\tilde{\mu}_v, \tilde{\mu}_l, \tilde{\mu}_u\}$ の値

個々の被験者の実験結果を再現する自由パラメータの値の組を見出し得るかどうか重要な問題として提起される。もし多くの被験者の一人一人に対して、その実験結果に対応する自由パラメータの値の組を見出すことができるならば、文字識別の個人差を、自由パラメータのもつ少数の自由度に還元し得たことになる。もしできなければ、より良い所属度関数の定義式の構成を求めなければならない。この目的のための具体的な実験の可能性については、今後の課題としたい。

2) セクションAの一般論の中で展開したファジー集合の基本演算については、今日まで多くのファジー研究者が異なる立場から様々な議論を戦わしている。セクションAで述べた一般論のその根幹部分は、多くのファジー研究者によって同意が得られている共通の仮定であるが、一部は本論文の著者たちの試論的な仮定である。ここに現在まで、ファジー学の分野でどのような説が出され、どこまでが共通の概念基盤になっているかを解説し、あわせてわれわれの立場との関係も明らかにしておく。

1. 仮定1. $\mu_{\phi} = 0$ の仮定

これは、共通の概念基盤として確立されている。これについて改めて言及しておくとの通りである。

空集合 ϕ についての所属度関数は恒等的に 0

全体集合 X についての所属度関数は恒等的に 1

2. 要請2. について

要請2. を改めて書き出して置く。

互いに背反である (同時成立しない)

A_1, A_2, \dots, A_N の中のどれか一つの所属

度が1になるとき、他のものの所属度はすべて0。

則ち

$$\mu_{A_i} = 1 \Rightarrow \mu_{A_j} = 0 \quad (j \neq i)$$

この要請は、必ずしもファジー学における共通認識とはいえない。しかし本論文においては、この要請を明らかな必然性をもつものとする。以下その理由を記述する。

もしある要素 x_0 に対して $\mu_{A_i}(x_0) = 1$ が成り立てば、この要素 x_0 は「あいまいさ」= 0 で A_i に属する。よって、概念として A_1, A_2, \dots, A_N が互いに背反であるならば、この要素 x_0 が A_i 以外の A_j に属することは、「あいまいさ」= 0 で、あり得ない。よって上の要請は、自然なものとして定立される。この立場はファジー化される前の概念構造 (背反性) を尊重する立場である。

3. ファジー集合の和集合と共通集合

ファジー集合のオリジナルの理論では、補集合、和集合、共通集合は次のように定式化された。²²

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \dots\dots\dots(19)$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \dots\dots(20)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \dots\dots(21)$$

ただしここで、記号 \max, \min は、 $\{ \}$ の中の2つのうち、各々、小さくない方、大きくない方を表している。

ところが、ここで上の(19)、(20)を組み合わせると、矛盾律 $A \cap \bar{A} = \phi$ を満たさない結果が導かれる。例えば、

今仮に $\mu_{\bar{A}}(x) = 0.5$ とすると、

$$(19) \text{より } \mu_A(x) = 1 - 0.5 = 0.5$$

次に(21)より $\mu_{A \cap \bar{A}} = \min\{0.5, 0.5\} = 0.5$

$$\therefore \mu_{A \cap \bar{A}} = 0.5$$

前述したように μ_{ϕ} は恒等的に 0 であるから、

$$A \cap \bar{A} \neq \phi \text{ である。}$$

表1 ファジイ和集合とファジイ共通集合のいくつかのクラス

提案者 [年代]	ファジイ和集合	ファジイ共通集合	パラメータの範囲
ハマハー [Hamacher, 1978]	$\frac{a+b-(2-\gamma)ab}{1-(1-\gamma)ab}$	$\frac{ab}{\gamma+(1-\gamma)(a+b-ab)}$	$\gamma \in (0, \infty)$
イエガー [Yager, 1980]	$\min[1, (a^w + b^w)^{1/w}]$	$1 - \min[1, ((1-a)^w + (1-b)^w)^{1/w}]$	$w \in (0, \infty)$

(文献(2)「ファジー情報学」p.64からの抜粋)

よって矛盾律 $A \cap \bar{A} = \phi$ を満たさない。

同様に、(19)と(20)を組み合わせることにより、排中律 $A \cup \bar{A} = X$ (全体集合) を満たさない結果 $\mu_{A \cup \bar{A}} \neq 1$ が導かれる。

この結果は、一つの立場として、 A 、 \bar{A} をはじめからファジー化された集合とすることにより、矛盾律や排中律に制約されない論理系が採用されたことを表している。

しかし、 A 、 \bar{A} に対して、あくまでもファジー化される前の「集合と補集合」の基本概念を出発点として考える限り、 $A \cap \bar{A} = \phi$ (矛盾律)、 $A \cup \bar{A}$ (排中律) が成り立ち、これから $\mu_{A \cap \bar{A}} = 0$ 、 $\mu_{A \cup \bar{A}} = 1$ が導出される。本論文はこの立場に立っている。

(20)(21)の定式化より後に、これとは異なる様々な立場から、ファジー和集合・共通集合の定義が提唱されている。その中には、矛盾律、排中律を満たすものも含まれている。更に、提唱されたこれらの定義の中には、定義式に含まれるパラメータを適当な値に選べば、本論文の仮定2を満たすものも存在する。最後に、この点を敷衍しておく。

上に掲げた表1. 2. は、(20)、(21)の定式化以後に提唱されたファジー和集合・共通集合のいくつかの所属度関数のクラス(定義)から、本論文の仮定2に関係する2つの定義を抜き出したものである。

上の表の中で、 a 、 b は各々 μ_A 、 μ_B を表している。はじめに、表の一行目のハマハーが与える定義式でパラメータ γ の値を $\gamma = 1$

に選んでみる。その結果は、

$$\begin{cases} \mu_{A \cup B} = \mu_A + \mu_B - \mu_A \cdot \mu_B \\ \mu_{A \cap B} = \mu_A \cdot \mu_B \end{cases} \text{となり}$$

この2式から、

$$\mu_{A \cap B} = \mu_A + \mu_B - \mu_{A \cup B} \text{ (仮定2) が導出される。}$$

次に、表の2行目のイエガーが与える定義式で、パラメータ w の値を $w = 1$ に選んでみる。

その結果は、

$$\begin{cases} \mu_{A \cup B} = \min\{1, \mu_A + \mu_B\} \\ \mu_{A \cap B} = 1 - \min\{1, 2 - (\mu_A + \mu_B)\} \end{cases}$$

となる。

そこで、次の(i)、(ii)場合に分けて考察する。

(i) $\mu_A + \mu_B \geq 1$ のとき

$$\begin{cases} \mu_{A \cup B} = \min\{1, \mu_A + \mu_B\} = 1 \\ \mu_{A \cap B} = 1 - \min\{1, 2 - (\mu_A + \mu_B)\} \\ = 1 - \{2 - (\mu_A + \mu_B)\} \\ = \mu_A + \mu_B - 1 \end{cases}$$

$$\therefore \mu_{A \cup B} + \mu_{A \cap B} = \mu_A + \mu_B$$

よって仮定2^o が成り立つ。

(ii) $\mu_A + \mu_B < 1$ のとき

$$\begin{cases} \mu_{A \cup B} = \min\{1, \mu_A + \mu_B\} = \mu_A + \mu_B \\ \mu_{A \cap B} = 1 - \min\{1, 2 - (\mu_A + \mu_B)\} \\ = 1 - 1 \\ = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \mu_{A \cup B} + \mu_{A \cap B} = \mu_A + \mu_B$$

よって仮定2が成り立つ。

(i)、(ii)のいずれにしても、仮定2が成り立

つことが分かった。

以上の考察から、ファジーの共通集合、和集合の定義には様々なクラスがあり、その中には、矛盾律、排中律を満たすものや、本論文における仮定2°を満たすものがあることが分かった。

最後に、本論文の基本条件である(3)式は、仮定された原理1、2と矛盾律・排中律を満たせば必ず成り立つことを改めて付言しておく。

どういう目的に対して、どういうファジークラスを採用すべきかの一般的指針は未だなく、ファジー学全体の中での未解決な課題であることを指摘しておく。

●謝 辞

本論文の具体的なコンピュータ計算に関しては、プログラム言語「MATHEMATICA」を使用した。その際、技術的な面で北海道大学の大学院生である只木孝太郎氏に貴重な助言、指導を頂いた。ここに深い感謝の意を表します。

参考文献

- (1) 寺岡宏、矢吹哲夫 1994 知能作用過程のシュミレーション
その5 文字情報の「あいまいさ」に関する理論的考察・北星短大、紀要30, 87-94
- (2) George J. Kliv and Ting A. Folger
本多中二訳：1993
ファジー情報学 日刊工業社
- (3) 浅居喜代治、C. V. Negoita 共編：
1990
ファジーシステム理論入門 オーム社