北星学園大学短期大学部北星論集第11号（通巻第49号）（2013年３月）・抜刷

【研究ノート】

量子力学的過程の測定結果の非局所性について

内　山　　　智

研究ノート

量子力学的過程の測定結果の非局所性について

内 山 智

目 次

1. はじめに

気体の熱力学に対する気体分子運動論のような関係に相当するような量子力学に対する機械論的模型を構成することは，量子力学の基礎の洞察に役立つことが期待される。量子力学の理論形式の本質的な部分をどのように再現するかについては，いまだ決定的な原理が解明されていないため，模型の構成は試行錯誤を繰り返さざるを得ない。現著者により，[1] で提案した模型のシリーズで，$\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)[n]$ と $M^{\beta_j}_{\alpha_i}(k',l')[n+1]$ にこれまでと異なる相関を仮定した，より単純な模型を提案する。この模型にのっとって，位相振動の仮説が，量子現象の非局所性が遠隔相互作用なしに説明する可能性が示される。

2. 機械論的模型

気体の熱力学に対する気体分子運動論のような関係に相当するような量子力学に対する機械論的模型を構成したい。測定前乱歩 x_b，古典的乱歩 x_{cl}，中間乱歩 x_{md} は [1] で提示されたものとするが，量子力学的過程 x_q は，本稿ではより単純化されたものを提案する。

Σ: 系 S の状態空間 (Symplectic manifold)。
D: 系 S を取り巻く環境の自由度の一部 ($D :=$ 2 次元開円盤 $\backslash 0 = \{e^{i\theta}u \mid \theta \in \mathbb{R},\ 0 < u < 1\}$)。
$\Xi := \Sigma \times D$: 量子力学的状態の空間に対応するもの。$\mathcal{O}(S)$: 系 S の観測可能量の集合。

$A_{cl} \in \mathcal{O}(S)$ は，Ξ へと自然に拡張される。$\pi : \Xi \to \Sigma$ を自然な射影として，$\xi \in \Xi$ に対して $A(\xi) := A_{cl} \circ \pi(\xi)$. 拡張された A は，D の自由度に依存しない。

T と ΔT を $4\Delta T < T$ なる正の実数として，t_1 に対して 5 つの時刻 $t_2 < t_3 < t_4 < t_5 < t_6$ を，$t_2 := t_1 + \Delta T$; $t_3 := t_2 + \Delta T$; $t_4 := t_3 + T - 4\Delta T$; $t_5 := t_4 + \Delta T$; $t_6 := t_5 + \Delta T$ と定義する。

時刻 t_1から時間間隔 T の間の時間発展 $x : [t_1, t_1 + T] \to \Xi$ を $(x(t_1), x(t_2), x(t_3), x(t_4), x(t_5), x(t_6)) \in \Xi^6$ という表現で近似して取り扱う。

$[t_i, t_i + n_f T]$, $n_f \in \mathbb{Z}$ という時間にわたる状態の変化 $x : [t_i, t_i + n_f T] \to \Xi$ は，この近似で，$\Omega := \Pi^{n_f}_{n=0}\Xi^6$ として，$\omega \in \Omega$ で近似される。以下の表記法を導入する。$\omega \in \Omega$ に対して，
$\omega = (\omega[0], \omega[1], \ldots, \omega[n], \ldots, \omega[n_f])$, $\omega[n] = (\omega^1[n], \omega^2[n], \omega^3[n], \omega^4[n], \omega^5[n], \omega^6[n])$.

$\mathcal{B}$ を Ω の適切な部分集合の σ-代数とすれば，確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu_x)$ は確率過程 x を表現する。たとえば，$x(t_i + nT) = x^1[n]$ が特定の状態 $\xi \in \Xi$ である確率は

$$\mu_x(\{\omega \in \Omega \mid \omega^1[n] = \xi\})$$

キーワード：量子力学的確率，非局所性，隠れた変数

で与えられる。

2.1. $\Omega^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)[n]$

極大なオブザーバブル $\hat{A}$ は測定の文脈 (context) を規定する。測定値を $a_1,\cdots,a_N$ とすると，対応する観測可能量 $A \in \mathcal{O}(S)$ の測定の文脈は $\underline{\alpha} := \{\alpha_1,\ldots,\alpha_N\}$ によってを特徴づけられる，ここで $\alpha_i = A^{-1}(a_i) \subset \Xi$。$a_1,\cdots,a_N$ はすべて異なるので，$i \neq j$ のとき，$\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$ である。

$\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, $\underline{\rho}$ を 測定の文脈として，Ω の部分集合を

$$\Omega^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)[n] := \big\{\omega \in \Omega \mid \omega^1[n] \in \alpha_i, \omega^2[n] \in \rho_k, \omega^3[n] \in \beta_j, \omega^4[n] \in \beta_j, \omega^5[n] \in \rho_l, \omega^6[n] \in \alpha_i\big\}$$

と定義する。

$l(\cdot|\cdot)$ は，任意の測定の文脈 $\underline{\alpha}$，$\underline{\beta}$ について，$\alpha_i \in \underline{\alpha}$，$\beta_j \in \underline{\beta}$ に対して

- $l(\beta_j|\alpha_i) \geq 0$;
- $\sum_{j=1}^N l(\beta_j|\alpha_i)^2 = 1$;
- $l(\beta_j|\alpha_i) = l(\alpha_i|\beta_j)$

を満たすものであるとする。

系 S とそれをとりまく環境の一部の状態が，$\alpha_i \in \underline{\alpha}$ から $\beta_j \in \underline{\beta}$ に遷移したとき，D の変化した偏角を $\theta_{\alpha_i,\beta_j} \in \mathbb{R}$ と書くことにする。更に

$$\theta_{\alpha_i,\beta_j} = -\theta_{\beta_j,\alpha_i} \tag{1}$$

を満たすものとする。

$\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(l,k) := \theta_{\alpha_i,\rho_l} + \theta_{\rho_l,\beta_j} + \theta_{\beta_j,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\alpha_i}$ とおく。

$$I_+(\beta_j|\alpha_i) := \{(k,l) \mid \cos\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l) \geq 0\},$$
$$I_-(\beta_j|\alpha_i) := \{(k,l) \mid \cos\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l) < 0\}$$

とする。

2.2. 量子力学的過程 x_q

$(l,k) \in I_+(\beta_j,\alpha_i)$ について

$$\mu_{x_q}(\Omega^{\beta_j}_{\alpha_i}(l,k)[n]) = \frac{1}{N'(\underline{\beta}|\alpha_i)}\cos\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(l,k) \times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i)$$

であり，$(l,k) \in I_-(\beta_j,\alpha_i)$ について

$$\mu_{x_q}(\Omega^{\beta_j}_{\alpha_i}(l,k)[n]) = \frac{1}{N'(\underline{\beta}|\alpha_i)}|\cos\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(l,k)| \times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i)$$

となる確率過程 x_q を量子力学的過程と呼ぶことにする。

$(k,l) \in I_+(\beta_j,\alpha_i)$ のとき，

$$\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)[n] := \Omega^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)[n] \cap \mathrm{supp}\mu_{x_q}$$

と定義する。

x_q は，$x^1[n] \in \alpha_i$ から $x^2[n] \in \rho_k$ に変化するとき，

$$\theta_{\rho_k,\alpha_i} = \arg\pi_D(x^2[n]) - \arg\pi_D(x^1[n])$$

だけ D の偏角が変化し，$x^2[n] \in \rho_k$ から $x^3[n] \in \beta_j$，$x^4[n] \in \beta_j$ から $x^5[n] \in \rho_l$ でも同様に偏角が変化するが，$x^5[n] \in \rho_l$ から $x^6[n] \in \alpha_i$ では θ_{α_i,ρ_l} だけ変化しても，D の偏角が最初に戻らないため，D の動径方向に垂直に射影して元の偏角の状態に戻るという模型で実現される。

同様に，$(k,l) \in I_-(\beta_j,\alpha_i)$ のとき，

$$M^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)[n] := \Omega^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)[n] \cap \mathrm{supp}\mu_{x_q}$$

と定義する。

$M^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)[n]$ は，D の同じ偏角の状態へ射影だけでは戻らない過程を表わしている。射影の後になんらかの経路で元に戻ることもあるかもしれないが，Bの測定に対して不安定な

過程であるため，測定されない過程と解釈したい。

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{(k,l)\in I_+}\mu_{x_q}(\Lambda_{\alpha_i}^{\beta j}(k,l)[n]) + \sum_{(k,l)\in I_-}\mu_{x_q}(M_{\alpha_i}^{\beta j}(k,l)[n])\right) = 1$$

より，

$$\begin{aligned} & N'(\underline{\beta}|\alpha_i) \\ = \ & 1+\sum_{j=1}^{N}\sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i),k\neq l}\cos\Delta\theta_{\alpha_i}^{\beta_j}(l,k) \\ & \times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i) \\ + \ & \sum_{j=1}^{N}\sum_{(k,l)\in I_-(\beta_j|\alpha_i)}|\cos\Delta\theta_{\alpha_i}^{\beta_j}(l,k)| \\ & \times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i) \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} & \mu_{x_q}(\Lambda_{\alpha_i}^{\beta j}(k,l)[n]\cap M_{\alpha_i}^{\beta j}(k',l')[n+1]) \\ = \ & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sum_{(k,l)\in I_+}\mu_{x_q}(\Lambda_{\alpha_i}^{\beta j}(k,l)[n])} + \frac{1}{\sum_{(k,l)\in I_+}\mu_{x_q}(M_{\alpha_i}^{\beta j}(k,l)[n+1])}\right) \\ \times \ & \mu_{x_q}(\Lambda_{\alpha_i}^{\beta j}(k,l)[n])\mu_{x_q}(M_{\alpha_i}^{\beta j}(k',l')[n+1]) \end{aligned}$$

を満たすと仮定する。

更に，$j'\neq j$ のとき

$$\mu_{x_q}(\Lambda_{\alpha_i}^{\beta j}(k,l)[n]\cap M_{\alpha_i}^{\beta j'}(k',l')[n+1]) = 0$$

を満たすと仮定する。

B の測定において，$\Lambda_{\alpha_i}^{\beta j}(k,l)[n]$ の次に $M_{\alpha_i}^{\beta j}(k',l')[n+1]$ という不安定な過程になる場合は測定結果が得られず，$\Lambda_{\alpha_i}^{\beta j}(k,l)[n]$ の次が $\Lambda_{\alpha_i}^{\beta j}(k',l')[n+1]$ である場合は，b_j という値が測定されると解釈することにする。

すると，b_j を得る確率は，次に比例する。

$$\begin{aligned} & \sum_{(k,l)\in I_+}\mu_{x_q}\Big(\Lambda_{\alpha_i}^{\beta j}(k,l)[n]\cap \\ & (\cup_{j'}\cup_{(k',l')\in I_-}M_{\alpha_i}^{\beta j'}(k',l')[n+1])^c\Big) \\ = \ & \sum_{(k,l)\in I_+}\mu_{x_q}(\Lambda_{\alpha_i}^{\beta j}(k,l)[n]) - \\ & \sum_{(k,l)\in I_+}\sum_{(k',l')\in I_-}\mu_{x_q}\Big(\Lambda_{\alpha_i}^{\beta j}(k,l)[n]\cap \\ & M_{\alpha_i}^{\beta j}(k',l')[n+1]\Big) \\ = \ & \sum_{(k,l)\in I_+}\mu_{x_q}(\Lambda_{\alpha_i}^{\beta j}(k,l)[n]) \\ & -\frac{1}{2}\sum_{(k,l)\in I_+}\mu_{x_q}\Big(\Lambda_{\alpha_i}^{\beta j}(k,l)[n]\Big) \\ & -\frac{1}{2}\sum_{(k',l')\in I_-}\mu_{x_q}\Big(M_{\alpha_i}^{\beta j}(k',l')[n+1]\Big) \\ = \ & \frac{1}{2N'(\underline{\beta}|\alpha_i)}\sum_{k,l}\cos(\Delta\theta_{\alpha_i}^{\beta_j}(l,k)) \\ & \times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i). \end{aligned}$$

この x_q は，$1/(2N'(\underline{\beta}|\alpha_i))$ による規格化が必要な点が，[1] の量子力学的過程と異なっている。測定結果に全ての可能性が尽くされていないので，取りこぼしがある模型となっているが，安定した測定結果だけに関する条件付き確率をとれば，量子力学の結果と一致する。

3. 測定結果の非局所性

$\underline{\rho}$ は S に特に測定を行わない場合でも状態が一時的に遷移する状態を与えるという特別な‘測定’の文脈であると考える。$k\neq j$ または $l\neq j$ のとき，$\mu_{x_q}(\Omega_{\alpha_i}^{\rho_j}(k,l))=0$ であり，$k\neq l$ という途中の状態のねじれがないため，この場合の x_q は古典的乱歩のような振る舞いをする。

S^{I+II} で，S^I について B^I の測定を行なう場合は，x_q では次のように考えられる。S^{II} について測定を行っていないが，S^{I+II} の測定の文脈は $\underline{\beta^I}\times\underline{\rho^{II}}$ であり，S^{II} は常に $\rho_{j^{II}}^{II}$

のどれかであることになる。これはちょうど，初期状態が $|\alpha_i\rangle$ のとき，$\hat{R}^{II}$ の完全系について部分トレースをとった場合と同じになる。

$\underline{\rho^I} \times \underline{\rho^{II}}$ は，$S^I \times S^{II}$ の測定の文脈であるので，少なくとも，S^I と S^{II} が同時に存在することをなんらかの方法で観測していることを意味する。これは $\underline{\rho^I}$ という S^I だけの測定の文脈とは異なる。

$|\alpha_i\rangle = |\alpha^I_{i^I}\rangle|\alpha^{II}_{i^{II}}\rangle$ のようにテンソル積で書ける場合は，

$$\begin{aligned} & \Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(l,k) \\ = \ & \theta_{\alpha^I_{i^I},\rho^I_{l^I}} + \theta_{\rho^I_{l^I},\beta^I_{j^I}} + \theta_{\beta^I_{j^I},\rho_k} + \theta_{\rho^I_{k^I},\alpha^I_{i^I}} \\ & + \theta_{\alpha^{II}_{i^{II}},\rho^{II}_{l^{II}}} + \theta_{\rho^{II}_{l^{II}},\beta^{II}_{j^{II}}} + \theta_{\beta^{II}_{j^{II}},\rho^{II}_{k^{II}}} \\ & + \theta_{\rho^{II}_{k^{II}},\alpha^{II}_{i^{II}}} \end{aligned}$$

のように S^I に関する部分と S^{II} に関する部分に分離できる。ここでは，$j = (j^I, j^{II})$，$\beta_j = \beta^I_{j^I} \times \beta^{II}_{j^{II}}$ などの記法に従っている。

$\underline{\beta} = \underline{\rho^I} \times \underline{\rho^{II}}$ の場合，$l(\rho_l, \beta_j)l(\beta_j, \rho_k) = l(\rho^I_{l^I}, \beta^I_{j^I})l(\rho^{II}_{l^{II}}, \beta^{II}_{j^{II}})l(\beta^I_{j^I}, \rho^I_{k^I})l(\beta^{II}_{j^{II}}, \rho^{II}_{k^{II}}) = l(\rho^I_{l^I}, \rho^I_{j^I})l(\rho^{II}_{l^{II}}, \rho^{II}_{j^{II}})l(\rho^I_{j^I}, \rho^I_{k^I})l(\rho^{II}_{j^{II}}, \rho^{II}_{k^{II}}) = \delta_{l^I,j^I}\delta_{l^{II},j^{II}}\delta_{j^I,k^I}\delta_{j^{II},k^{II}} = \delta_{l,j}\delta_{j,k}$ であるので，$\forall(k,l) \in I_-(\beta_j, \alpha_i)$ に対して，$\mu_{x_q}(M^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)[n+1]) = 0$ である。

測定結果の局所性とは，S^I 或いは S^{II} のどちらか一方の測定の文脈の変更が他方の系に影響を及ぼさないということである。

$\underline{\rho^I} \times \underline{\rho^{II}}$ から $\underline{\beta^I} \times \underline{\rho^{II}}$ へ測定の文脈を変更したとき，ある $(k,l) \in I_-(\beta^I_{j^I} \times \rho^{II}_{j^{II}}, \alpha_i)$ が存在して $\mu_{x_q}(M^{\beta^I_{j^I} \times \rho^{II}_{j^{II}}}_{\alpha_i}(k,l)[n+1]) \neq 0$ であるとしよう。測定結果の局所性を仮定するならば，S^I に対する測定の文脈が $\underline{\beta^I}$ に変更されただけなので，このような状態は，S^{II} は安定していて測定可能だが S^I は不安定で測定されないと考えなければならない。

引き続いて，$\underline{\beta^I} \times \underline{\rho^{II}}$ から $\underline{\beta^I} \times \underline{\beta^{II}}$ へ測定の文脈を変更したとしよう。更に $(k,l) \in I_+(\beta^I_{j^I} \times \beta^{II}_{j^{II}}, \alpha_i)$ であり，$\mu_{x_q}(\Lambda^{\beta^I_{j^I} \times \beta^{II}_{j^{II}}}_{\alpha_i}(k,l)[n+1]) \neq 0$ であったとする。測定結果の局所性を仮定するならば，S^{II} に対する測定の文脈が $\underline{\beta^{II}}$ に変更されただけなので，S^I は安定になって測定可能になったと考えることはできない。この場合は測定結果の局所性は成立しないことになる。

安定か不安定かを決定するのは，$\Delta\theta^{\beta^I_{j^I} \times \rho^{II}_{j^{II}}}_{\alpha_i}(l,k)$ であるから，このどの部分が S^I の安定性と決め，どの部分が S^{II} の安定性を決めるかには，不定性がある。そこで，**位相振動の仮説**として，$\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(l,k)$ の S^I と S^{II} への分離が時間的に振動するとか，あるいはランダムに変化して，測定のタイミングで分離が定まるという要請をしよう。すると，$\underline{\rho^I} \times \underline{\rho^{II}}$ から $\underline{\beta^I} \times \underline{\rho^{II}}$ へ測定の文脈を変更したとき，S^I に対する測定の文脈が $\underline{\beta^I}$ に変更されただけであるが，そのとき $\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(l,k)$ の分離が S^{II} が不安定となって測定されないということもあり得る。この場合は，測定結果の局所性を破ることにはなるが，$\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(l,k)$ の分離の仕方が S^I と S^{II} でシンクロしているというだけなので，遠隔作用が存在するわけではない。

引き続いて，$\underline{\beta^I} \times \underline{\rho^{II}}$ から $\underline{\beta^I} \times \underline{\beta^{II}}$ へ測定の文脈を変更した場合も，$\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(l,k)$ の分離が S^{II} が不安定であったものが，測定器との相互作用で安定になって，S^I と S^{II} が測定されるということが可能になる。

位相振動の仮説は，遠隔相互作用がなくても測定結果の非局所性を説明できる重要な仮説である。それゆえ，位相振動はどのように行われるかを詳細に検討することが今後の課題である。

[参考文献]

[1] 内山　智，“均衡原理に基づく量子力学的過程による複合系の取り扱い”，北星学園大学短期大学部北星論集，**10**，13–21 (2012).