北星学園大学短期大学部北星論集第11号（通巻第49号）（2013年３月）・抜刷

【研究ノート】

量子力学的状態について

内　山　　　智

研究ノート

量子力学的状態について

内 山 智

目 次

1. はじめに

本稿では，密度行列が表現するものは，どのような意味で物理系の状態と解釈することができるかを考察した。Jammer[1] が彼の著書で述べたように，量子力学の数学形式は「...非常に込み入った概念上の試行錯誤を経て形成されていったものであって，形式自身がその解釈に先立ったというおそらく物理科学の歴史のなかでも，ほとんど無二の発展過程をたどったと言っても過言ではないものである」。それゆえ，可能な解釈を排除してしまわないよう，数学的な事柄とその解釈を明確に区別すべきであろう。

まずはじめに，密度行列に関する数学的な事柄を述べる。その次に，密度行列，集団，量子力学的状態について，それらの解釈について考察する。その結果，量子力学的な純粋状態は，単一の物理的対象の素朴な意味での状態とは言えないことがわかる。

2. 密度行列とその数学的性質

量子力学的状態は，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の 1 次元部分空間によって表わされる。$\{e_j | j \in J\}$ を完全正規直交系とする。1 次元部分空間は，それに属する単位ヴェクトルのすべてのスカラー倍のヴェクトルから成るので，量子力学的状態は，単位ヴェクトルによって代表される。

無限次元 Hilbert 空間は，エネルギーのオブザーバブルを表す演算子の存在といった物理的な必要性から要請されるものであるが，本稿の考察の範囲ではその有限次元部分空間に属する量子力学的状態に限定することで十分である。数学的複雑さを避けるために，以下ではそれらを必要としない範囲で量子力学的状態について考察する。$\mathcal{H}$ は有限次元であると仮定する。つまり，添え字の集合 J は有限集合とする。

$\mathcal{H}$ 上のすべての線形作用素全体からなる線形空間を $\mathbf{L}(\mathcal{H})$ で表わす。$A \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ に対して，

$$\mathrm{Tr}A := \sum_{i \in J} (e_i, Ae_i) \tag{1}$$

と定義し，これを A のトレース (trace) と呼ぶ。ここで，$(\cdot,\cdot)$ は $\mathcal{H}$ の内積で，$u, v \in \mathcal{H}$, $a, b \in \mathbb{C}$ に対して $(au, bv) = \bar{a}b(u, v)$ なるものとする。良く知られているように，トレース Tr は $\mathbf{L}(\mathcal{H})$ からスカラー体 $\mathbb{C}$ への線形写像であり，任意の $A, B \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ に対して $\mathrm{Tr}AB = \mathrm{Tr}BA$ が成り立つ。

定義 1 $\rho \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ が，$\rho^\dagger = \rho$ *(Hermitian)*, $\rho \geq 0$ *(半正値)*, $\mathrm{Tr}\rho = 1$ を満たす時，ρ は密度行列 *(density matrix)* と呼ばれる。

キーワード：密度行列，量子力学的状態，状態概念

ρ_1, ρ_2 が密度行列のとき，s を $0 < s < 1$ なる実数とすると，$s\rho_1 + (1-s)\rho_2$ も密度行列となる。実際，$\mathrm{Tr}(s\rho_1 + (1-s)\rho_2) = s\mathrm{Tr}\rho_1 + (1-s)\mathrm{Tr}\rho_2 = s + (1-s) = 1$ となるからである。

定義 2 密度行列 ρ が，異なる密度行列 ρ_1 と ρ_2 と $0 < s < 1$ なる実数 s が存在して，$\rho = s\rho_1 + (1-s)\rho_2$ と表わすことができる場合，ρ は**混合**であると言われる。混合ではない密度行列は，**純粋**であると言われる。

命題 1 密度行列 ρ が，n 個の異なる純粋な密度行列 $\rho_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ と $w_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ によって，$\rho = \sum_{i=1}^{n} w_i\rho_i$ と書けるならば，$0 < s < 1$ なる実数 s と異なる密度行列 ϕ_1, ϕ_2 が存在して，$\rho = s\phi_1 + (1-s)\phi_2$ と書ける，すなわち，ρ は混合である。

証明. n についての数学的帰納法で証明する。$n = 2$ のときは，明らかである。$n = k$ まで成立するとする。$n = k+1$ のとき，$s := w_{k+1}$，$\phi_1 := \rho_{k+1}$，$\phi_2 := (1-s)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} w_i\rho_i$ とおく。$1 = \mathrm{Tr}\rho = \sum_{i=1}^{k+1} w_i$ より，$\sum_{i=1}^{k} w_i = 1 - s$ であるから，$\mathrm{Tr}\phi_2 = (1-s)^{-1}\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$ より，ϕ_2 は密度行列である。$s\phi_1 + (1-s)\phi_2 = \rho$ であることがわかる。

後は $\phi_1 \neq \phi_2$ を示せば十分である。ϕ_2 は，数学的帰納法の仮定より混合である。$\phi_1 = \rho_{k+1}$ は純粋なので，これは ϕ_2 とは等しくはない。 □

命題 2 任意の密度行列 $\rho_1, \rho_2 \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ に対して，$(\mathrm{Tr}\rho_1\rho_2)^2 \leq \mathrm{Tr}\rho_1^2 \cdot \mathrm{Tr}\rho_2^2$ が成り立つ。等号は，$\rho_1 = \rho_2$ の時のみ成り立つ。

証明. 任意の実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathrm{Tr}(t\rho_1 - \rho_2)^2 \geq 0$ であることから，従う。

$\rho_1 = \rho_2$ の時，等号が成り立つのは明らか。逆に等号が成り立てば，$\mathrm{Tr}(t\rho_1 - \rho_2)^2 = 0$ となる t はただ一つで，$t = \mathrm{Tr}\rho_1\rho_2/\mathrm{Tr}\rho_1^2$ であり，この t について $(t\rho_1 - \rho_2)^2 = 0$ である。従って，$(\mathrm{Tr}\rho_1\rho_2/\mathrm{Tr}\rho_1^2)\rho_1 = \rho_2$ となり，両辺の Tr をとって $\mathrm{Tr}\rho_1\rho_2/\mathrm{Tr}\rho_1^2 = 1$ を得る。故に，$\rho_1 = \rho_2$ である。 □

部分空間 $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}$ への射影を $P_{\mathcal{V}}$ と書くことにする。$v \in \mathcal{H}$ が張る $\mathcal{H}$ の部分空間を $[v]$ と書くことにする。すると，射影の定義から $P_{[v]}^2 = P_{[v]} = P_{[v]}^\dagger$，$P_{[v]}v = v$ である。$v \neq 0$ の場合は具体的に，$\forall u \in \mathcal{H}$，$P_{[v]}u = (v, u)/\|v\|^2 v$ と書ける。

命題 3 任意の *0* ではない $v \in \mathcal{H}$ に対して，$P_{[v]}$ は密度行列である。

証明. 射影の定義から，$P_{[v]}^\dagger = P_{[v]}$ である。また，$P_{[v]}^2 = P_{[v]}$ より，$P_{[v]} \geq 0$ である。$\{v_i | i \in J\}$ を $v_{i_0} = v/\|v\|$ なる $\mathcal{H}$ の完全正規直交系とすれば，$\mathrm{Tr}P_{[v]} = \sum_{i\in J}(v_i, P_{[v]}v_i) = (v_{i_0}, P_{[v]}v_{i_0}) = \|v_{i_0}\|^2 = 1.$ □

密度行列 ρ は，定義から Hermitian なので，ある正規直交系 $\{v_i | i \in J\}$ で対角化できる，つまり，

$$\rho = \sum_{i\in J} p_i P_{[v_i]} \tag{2}$$

である。p_i は，$1 = \mathrm{Tr}\rho = \sum_{i\in J} p_i$ より，

$$\sum_{i\in J} p_i = 1 \tag{3}$$

を満たす。$p_i = (v_i, \rho v_i)$ なので，$p_i \geq 0$ である。これらから，$0 \leq p_i \leq 1$ である。故に，各々の $i \in J$ について

$$0 \leq p_i^2 \leq p_i \leq 1 \tag{4}$$

である。$\mathcal{H}$ が無限次元でも，密度行列を可分な Hilbert 空間上のトレースクラス演算子とすれば，(2) のような分解ができることが知られている。

命題 4 密度行列 ρ に対して，$\mathrm{Tr}\rho^2 \leq 1$。

証明. (2) のように分解すると，$P_{[v_i]}P_{[v_j]} = \delta_{ij}P_{[v_i]}$ なので，$\rho^2 = \sum_{i\in J} p_i^2 P_{[v_i]}$ である。従って，(4) より $\mathrm{Tr}\rho^2 = \sum_{i\in J} p_i^2 \le \sum_{i\in J} p_i = 1$。 □

命題 5 任意の *0* ではない $v \in \mathcal{H}$ に対して，$P_{[v]}$ は純粋である。

証明. $P_{[v]}$ は純粋でないと仮定してみよう。すると，異なる密度行列 ϕ_1 と ϕ_2 が存在し，$0 < s < 1$ なる実数 s によって $P_{[v]} = s\phi_1 + (1-s)\phi_2$ と書けることになる。ところが，$1 = \mathrm{Tr}P_{[v]} = \mathrm{Tr}(P_{[v]}^2) = s^2\mathrm{Tr}(\phi_1^2) + 2s(1-s)\mathrm{Tr}(\phi_1\phi_2) + (1-s)^2\mathrm{Tr}(\phi_2^2) \le s^2 + 2s(1-s)\mathrm{Tr}\phi_1\phi_2 + (1-s)^2$ である。命題 2 より，$\mathrm{Tr}(\phi_1\phi_2) < 1$ なので，$1 < s^2 + 2s(1-s) + (1-s)^2 = 1$ となり矛盾である。故に，$P_{[v]}$ は純粋である。 □

命題 6 密度行列 ρ に対して，$\mathrm{Tr}\rho^2 = 1 \Leftrightarrow \rho$ は純粋。

証明. (2) のように分解し，(3) の両辺を 2 乗して，$\sum_{i,j\in J} p_i p_j = \sum_{i\in J} p_i^2 + \sum_{i\neq j} p_i p_j = 1$ であることに注意すると，$\mathrm{Tr}\rho^2 = 1 \Leftrightarrow \sum_{i\in J} p_i^2 = 1 \Leftrightarrow \sum_{i\neq j} p_i p_j = 0 \Leftrightarrow$ ある $l \in J$ が存在して，$p_i = \delta_{il} \Leftrightarrow \rho = P_{[v_l]} \Leftrightarrow \rho$ は純粋。 □

$\mathcal{H}$ が二つの有限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}^I$ と $\mathcal{H}^{II}$ のテンソル積である場合を考えよう，つまり $\mathcal{H} = \mathcal{H}^I \otimes \mathcal{H}^{II}$。$\{f_{i^I} | i^I \in J^I\}$ を $\mathcal{H}^I$ の完全正規直交系とする。$\{g_{i^{II}} | i^{II} \in J^{II}\}$ を $\mathcal{H}^{II}$ の完全正規直交系とする。$J = J^I \times J^{II}$ であり，$e_{(i^I, i^{II})} = f_{i^I} \otimes g_{i^{II}}$ とする。ρ を $\mathcal{H}$ 上の密度行列とする。任意の $u, v \in \mathcal{H}^I$ に対して，

$$(u, (\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{II}}\rho)v) := \sum_{i^{II}\in J^{II}} (u \otimes g_{i^{II}}, \rho(v \otimes g_{i^{II}})) \tag{5}$$

とおく。$vXu : \mathcal{H}^I \to \mathcal{H}^I$ を，$\forall w \in \mathcal{H}^I$ に対して $vXu(w) := (u, w)v$ と定義する。$(vXu)^\dagger = uXv$ である。すると，

$$(u, (\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{II}}\rho)v) = \mathrm{Tr}((vXu \otimes 1)\cdot\rho)$$

である。この量は，$\mathcal{H}^{II}$ の完全正規直交系 $\{g_{i^{II}} | i^{II} \in J^{II}\}$ の取り方に依らない。

定義 3 $\mathcal{H}$ 上の密度行列 ρ に対して，*(5)* によって定まる $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{II}}\rho : \mathcal{H}^I \to \mathcal{H}^I$ を ρ の $\mathcal{H}^{II}$ に関する部分トレース *(partial trace)* と呼ぶ。

命題 7 ρ を $\mathcal{H} = \mathcal{H}^I \otimes \mathcal{H}^{II}$ 上の密度行列とする。$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{II}}\rho$ は，$\mathcal{H}^I$ 上の密度行列である。

証明. 任意の $u, v \in \mathcal{H}^I$ に対して $((\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{II}}\rho)^\dagger u, v) = (u, (\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{II}}\rho)v) = \overline{\mathrm{Tr}((vXu \otimes 1)\rho)} = \overline{\mathrm{Tr}(\rho(vXu \otimes 1))} = \overline{\mathrm{Tr}((vXu \otimes 1)^\dagger\rho^\dagger)} = \overline{\mathrm{Tr}((uXv \otimes 1)\rho)} = \overline{(v, (\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{II}}\rho)u)} = ((\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{II}}\rho)u, v)$。故に $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{II}}\rho$ は Hermitian。$(u, (\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{II}}\rho)u) = \sum_{i^{II}\in J^{II}} (u \otimes g_{i^{II}}, \rho(u \otimes g_{i^{II}})) \ge 0$ より，$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{II}}\rho$ は半正値。$\mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{II}}\rho) = \sum_{i^I\in J^I} (f_{i^I}, (\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{II}}\rho)f_{i^I}) = \mathrm{Tr}\rho = 1$。以上から $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{II}}\rho$ は $\mathcal{H}^I$ 上の密度行列である。 □

命題 8 ρ^I を $\mathcal{H}^I$ 上の密度行列，ρ^{II} を $\mathcal{H}^{II}$ 上の密度行列とする。$\rho := \rho^I \otimes \rho^{II}$ は $\mathcal{H}^I \otimes \mathcal{H}^{II}$ 上の密度行列である。もし ρ^I または ρ^{II} が混合ならば，ρ は混合である。

証明. $\mathrm{Tr}(\rho^I \otimes \rho^{II}) = \mathrm{Tr}\rho^I \cdot \mathrm{Tr}\rho^{II}$ なので，$\mathrm{Tr}\rho = 1$。$\rho^\dagger = (\rho^I)^\dagger \otimes (\rho^{II})^\dagger = \rho^I \otimes \rho^{II} = \rho$。$\{v_i | i \in J^I\}$ を $\rho^I = \sum_{i\in J^I} p_i P_{[v_i]}$ となる $\mathcal{H}^I$ の完全正規直交系とする。任意の $u \in \mathcal{H}^I \otimes \mathcal{H}^{II}$ に対して，$u = \sum_{i\in J^I} v_i \otimes u_{;i}$ となる $u_{;i} \in \mathcal{H}^{II}$ が存在する。$(u, \rho u) = \sum_{i,j\in J^I} (v_j, \rho^I v_i)(u_{;j}, \rho^{II} u_{;i}) = \sum_{i\in J^I} p_i (u_{;i}, \rho^{II} u_{;i}) \ge 0$ である。従って，ρ は密度行列である。

ρ^I が混合であるとき，命題6より $\mathrm{Tr}(\rho^I)^2 < 1$ なので，$\mathrm{Tr}\rho^2 = \mathrm{Tr}(\rho^I)^2 \cdot \mathrm{Tr}(\rho^{II})^2 < 1$ となり，命題6より ρ は混合である。同様に，ρ^{II} が混合のときも $\mathrm{Tr}\rho^2 < 1$ となり，ρ は混合である。 □

命題 9 *(d'Espagnat[2])* ρ を $\mathcal{H}^I \otimes \mathcal{H}^{II}$ 上の密度行列とする。$\rho^I := \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{II}}\rho$ が純粋ならば，$\rho = \rho^I \otimes \rho^{II}$ なる $\mathcal{H}^{II}$ 上の密度行列 ρ^{II} が存在する。

証明. $\rho = \sum_i p_i P_{[v_i]}$ なる $\mathcal{H}^I \otimes \mathcal{H}^{II}$ の完全正規直交系 $\{v_i\}$ が存在する。$v_i = \sum_{j^I \in J^I} f_{j^I} \otimes v_{i;j^I}$ と書ける。ここで，$v_{i;j^I} \in \mathcal{H}^{II}$。$\rho^I = \sum_{j^{II} \in J^{II}} \sum_i p_i \sum_{i^I, j^I \in J^I} (v_{i;i^I}, g_{j^{II}})(g_{j^{II}}, v_{i;j^I})(f_{i^I} X f_{j^I}) = \sum_i p_i \sum_{i^I, j^I \in J^I} (v_{i;i^I}, v_{i;j^I}) \times (f_{i^I} X f_{j^I})$ となる。$\{f_{i^I} \mid i^I \in J^I\}$ を $\rho^I = \sum_{i^I \in J^I} r_{i^I} P_{[f_{i^I}]}$ となる $\mathcal{H}^I$ の完全正規直交系とすれば，$\sum_i p_i (v_{i;i^I}, v_{i;j^I})(f_{i^I} X f_{j^I}) = \delta_{i^I, j^I} r_{i^I}$ でなければならない。ρ^I は純粋であるから,ある $l \in J^I$ が存在して $r_{i^I} = r_l \delta_{l i^I}$ である。$\sum_i p_i (v_{i;i^I}, v_{i;j^I})(f_{i^I} X f_{j^I}) = \delta_{i^I, j^I} \delta_{l i^I} r_l$ より，$i^I \neq l$ に対して $v_{i;i^I} = 0$ である。故に，$v_i = f_l \otimes v_{i;l}$ となって，$\rho = \sum_i p_i P_{[f_l]} \otimes (v_{i;l} X v_{i;l})$ となるので，$\rho^{II} = \sum_i p_i \|v_{i;l}\|^2 P_{[v_{i;l}]}$ である。 □

命題 10 $\dim \mathcal{H}^{II} \geq \dim \mathcal{H}^I$ ならば，$\mathcal{H}^I$ 上の任意の密度行列 ρ^I に対して，$\mathcal{H}^I \otimes \mathcal{H}^{II}$ 上の純粋な密度行列 ρ が存在して，$\rho^I = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{II}}\rho$ となる。

証明. ρ^I を (2) のように $\mathcal{H}^I$ の完全正規直交系 $\{v_{i^I} \mid i^I \in J^I\}$ で展開する:

$$\rho^I = \sum_{i^I \in J^I} p_{i^I} P_{[v_{i^I}]}.$$

$\dim \mathcal{H}^{II} \geq \dim \mathcal{H}^I$ なので，$J^I \subseteq J^{II}$ として良い。$\varphi := \sum_{i^I \in J^I} \sqrt{p_{i^I}} v_{i^I} \otimes g_{i^I}$ とおく。$\|\varphi\| = 1$ である。$\rho = P_{[\varphi]}$ とおけばよい。実際，$(u, (\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}^{II}} P_{[\varphi]})v) = \sum_{j^{II} \in J^{II}} (u \otimes g_{j^{II}}, P_{[\varphi]} v \otimes g_{j^{II}}) = \sum_{j^{II} \in J^{II}} (u \otimes g_{j^{II}}, \varphi)(\varphi, v \otimes g_{j^{II}}) = \sum_{i^I \in J^I} p_{i^I} (u, v_{i^I})(v_{i^I}, v) = (u, \rho^I v)$ が任意の $u, v \in \mathcal{H}^I$ に対して成り立つ。 □

3. 物理系の状態と密度行列の解釈

物理系の状態についての素朴な考えは，次の考え方に従うものである: 二つの物理系 S_1 と S_2 が与えられたとする。それらに同じ処理を施しながら，結果が異なるとき，その出発点において S_1 と S_2 は異なる状態であったと判断される。

「同じ処理」というのは，例えば，同じオブザーバブル（観測可能量）を同じ測定器 M を使って S_1 と S_2 について測定するということを素朴には意味する。しかし，同じ測定器 M を使用しても，その測定器と被測定対象との相互作用が十分に制御されていないのならば，必ずしも同じ処理をしたことにはならない。そこで，測定器 M を改良していくことになるが，そのためには M で測定することを何度も繰り返しても同じ状態の物理系 S に対して同じ結果が得られるようになることが目標となる。測定器 M の改良のためには，同じ状態の物理系 S を準備しなければならないが，できるだけ M による測定結果が同一になることを目標として，S を準備する方法を工夫し改良していくことになる。測定器 M の改良と S の準備の方法の改良が各々の目標を達成したときに，測定器 M は同じ処理をするものとみなされ，我々は物理系 S の状態の違いを知ることができると判断される。古典力学的な振る舞いをするマクロな物理系では，この素朴な状態に対する考え方が最後まで上手

くいって，物理系の状態を定めるものは何かを突き止めることができた。例えば，質点とみなして良いような物理系の状態とは，その位置と速度によって定まるものということが分かった。

量子論的な物理系では，すべてのオブザーバブルに関して同じ結果もたらすような物理系の状態が存在しないようにオブザーバブルの測定結果の統計的振る舞いが得られる。素朴な状態の考え方を踏襲すれば，量子論ではそのような素朴な状態を分離して準備することができないと言えよう。これは，量子論的な物理系のオブザーバブルの統計量は密度行列によって記述されるようなものであることと，密度行列の数学的性質から得られる一つの解釈である。別の解釈も可能であって，それは正統な Copenhagen 解釈のように，測定による制御不能な擾乱のため，同じ状態で準備されたとしても異なる測定結果がもたらされるというものである。しかし，この解釈では，EPR 型の実験のような場合，測定による制御不能な擾乱は，ミクロな領域だけではおさまらないという不自然さが生じる。

量子力学が教えてくれるのは，物理系に関するオブザーバブルの可能な観測結果とその統計量である。統計量は，1 回の測定では得られないので，実験的検証には多数回の測定を必要とする。この多数回の実験をするために用意される物理的な系の集団を考えよう。

この集団を E という記号で表し，その要素である物理系を添え字 $i = 1, 2, \cdots$ をつけて区別するなら，$E = \{S_1, S_2, \cdots, S_i, \cdots\}$ ということになる。S_i は，物理系 S が異なる時間に用意されたものである場合や，物理系 S と同じように用意された別の物理系 S' である場合もある。例えば，光子の位置を測定する実験であれば，最初に検出された光子 S_1 はそのエネルギーを失って消滅するので 2 回目の測定はできないので，S_2 として同様の仕方で用意した光子を使って実験をせざるを得ない。この場合，S_1 と S_2 は違う物理系ではあるが，同じ型の物理系と言うことはできる。

集団 E は様々な状態の物理系からなると考えられ，E とは違う集団 E' でも，$S_i \in E$ と $S'_j \in E'$ が同じ状態であるということもあり得る。素朴に物理系の状態を区別したときと同様の考え方が，集団についても適用できるだろう。D'Espagnat[2] が原理の形で明瞭に述べる価値があるとした「統計的決定論の原理」とは「もしも物理系の二つの統計集団が同じ処理をされ，そしてもしもそれに続く観測がそれらの間に意味のある統計的な差を見出したならば，そのことが意味するのは，二つの集団が出発点において同一ではなかったということである」ということである。この原理に従って，すべてのオブザーバブルの統計量が一致する集団は等しいと判断される。

以下で見るように密度行列はオブザーバブルの統計量の計算方法を提供するものであるから，密度行列はこの集団を表現するものと解釈できる。従って，密度行列は，個々の物理系ではなく統計量を算出するための集団の性質を表わすものであるという解釈には異論はないであろう。

密度行列やオブザーバブルは数学的には Hilbert 空間上で定義されたものであった。物理系 S_i の状態は Hilbert 空間のヴェクトルで表わされる量子力学的状態で完全ではないが不完全に記述されていると考えることで，集団 E と Hilbert 空間上で定義された密度行列を結び付けることが可能になる。E が，量子力学的状態 $\varphi_1, \cdots, \varphi_\mu \in \mathcal{H}$ によって，φ_i の量子力学的状態の性質をもつ要素である物理系の集団を E_i として，$E = \cup_{i \in \{1, \cdots, \mu\}} E_i$ であるとする。E_i の要素の数を $N_i (\geq 1)$ とし，N を E の要素の数とすると，$N = \sum_{i=1}^{\mu} N_i$ である。集団 E の $E_1, \cdots, E_\mu$ による分割は，要素である物理系の状態がどの量子力学的状態 φ_i の性質を持つかによって分類した結果で

ある。

$$\sigma := \sum_{i=1}^{\mu} \frac{N_i}{N} P_{[\varphi_i]} \tag{6}$$

は，$\mathcal{H}$ 上の密度演算子であることを確かめることは容易である。

このσはいかなる意味で，集団 E の統計的性質を表わすのであろうか。E の各々の要素に対してオブザーバブル $A \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$ の測定を行ったとき，φ_i が A の固有値 a_i に属する固有状態 $\alpha_i \in \mathcal{H}$ であるなら，A の統計的性質はσによって計算可能である。ここで a_i は縮退している場合は同じ値として $\{\alpha_i\}$ は完全正規直交系となるものとする。実際，A の n 次のモーメント $\langle A^n \rangle$ は，$\mathrm{Tr}(A^n P_{[\alpha_i]}) = (a_i)^n$ なので，

$$\langle A^n \rangle = \mathrm{Tr}(A^n \sigma) = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{N_i}{N} (a_i)^n \tag{7}$$

と計算されるからである。

(7) の第 2 項の $\mathrm{Tr}(A^n \sigma)$ は，φ_i が A の固有状態ではない場合にも，数学的には自然に拡張できることから，(6) は集団 E の統計的性質を表わすと主張される。しかし，一般に $\mathrm{Tr}(A^n P_{[\varphi_i]}) \neq (a_i)^n$ であって，$\mathrm{Tr}(A^n P_{[\varphi_i]})$ そのものはもはや標本としての集団 E の統計量の計算であるとは言えない。

A の測定結果がどの a_i であったかということで集団 E の別の分割 $F_1, \cdots, F_{\#J}$ を考えよう。$E = \cup_{j \in J} F_j$ で，つまり F_j は a_j の測定結果であった E の要素の集団とする。$N'_j = \#F_j$ で F_j の要素数とする。測定の前後で別の系 S が集団に追加や除外がされないと仮定するならば，$\sum_{j \in J} N'_j = N$ である。実験回数を増やして N が大きくなると，N'_j/N は $\sum_{i=1}^{\mu} |(\alpha_j, \varphi_i)|^2 N_i/N$ に近付くように集団 E は変化することを要請する。測定結果から計算される A の n 次のモーメントは，$\sum_{j \in J} (N'_j/N)(a_j)^n$ である。$N \to \infty$ で，これは

$$\sum_{i=1}^{\mu} \frac{N_i}{N} \sum_{j \in J} |(\alpha_j, \varphi_i)|^2 (a_j)^n = \mathrm{Tr}(A^n \sigma)$$

に近づくのだから，確かに密度行列σは集団 E のオブザーバブルの測定結果の統計的性質に関する十分な情報を持っていると解釈可能である。

光の偏光について，偏光板を通過させることで測定する場合は，偏光板を通過させた後の光を実験対象とすることで，測定ではなく状態の準備を行うことになる。このような方法で，測定前の集団が純粋な密度行列で表現できる集団 E を用意できる。Von Neumann は，$\mu = 1$ となるこのような集団 E を一様な集団と呼んだ。何故ならば，この集団 E の統計的性質を表す密度行列は $\sigma = P_{\varphi_1}$ となるから，σは純粋であるから，$\sigma = s\phi_1 + (1-s)\phi_2$ のように，異なる密度行列 ϕ_1 と ϕ_2 にそれぞれ対応する集団 D_1 と D_2 によって $E = D_1 \cup D_2$ とはできないからである。

一様な集団 E が分割できないということから，E の要素の物理系 S_i は皆同じ状態であり，従って S_i の状態は量子力学的状態で完全に記述されると考えるのが Copenhagen 解釈である。しかし，あるオブザーバブル A については，集団 E についてその測定結果の分散 $\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \mathrm{Tr}((A - \langle A \rangle)^2 \sigma)$ が 0 ではない場合があることから，同じ状態でも違う測定結果をもたらすことになり，この解釈は素朴な状態の考え方に反する。

純粋な密度行列で表現される一様な集団を特別視して，密度行列の解釈を集団から状態へと解釈を変更することは，命題 9 に鑑みて自然な思考といえよう。しかし，純粋な密度行列で表現される一様な集団を特別視することは次のような不自然さがある。混合である密度行列で表わされる集団の要素は，異なる状態を持つと解釈すべきなのに，命題 10 のように他の物理系との合成系の一部と考

えるならば，数学的には常に同じ状態の物理系と考えなければならなくなってしまうことである。同じ状態の部分系が違う状態ということは，量子力学的状態という状態概念は素朴な状態概念と異なるものであり，部分を合わせたものが全体にならないような状態であることを示唆している。

［参考文献］

[1] M. Jammer, "*THE PHILOSOPHY OF QUANTUM MECHANIC – The Interpretations of Quantum Mechanics in Historical Perspective*", (John Wiley & Sons. Inc., New York, 1974) [井上 健 訳「量子力学の哲学」上・下 (紀伊國屋書店, 1983)].

[2] B. d'Espagnat, "*CONCEPTUAL FOUNDATIONS OF QUANTUM MECHANICS*", 2nd ed. (W. A. Benjamin, Inc., 1976) [町田 茂 訳「量子力学における 観測の理論」(岩波書店, 1980)].

[3] J. von Nuemann, "*DIE MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DER QUANTENMECHANIK*", (Springer Verlag, Berlin, 1932) [井上 健 他 訳「量子力学の数学的基礎」(みすず書房, 1957)].

[4] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?", *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).

[5] S. Uchiyama, "Local Reality: Can It Exist in the EPR–Bohm Gedanken Experiment?", *Found. Phys.* , **25** (1995) 1561–1575.