北星学園大学短期大学部北星論集第10号（通巻第48号）（2012年３月）・抜刷

均衡原理に基づく量子力学的過程による複合系の取り扱い

内　山　　　智

均衡原理に基づく量子力学的過程による複合系の取り扱い

内　山　　　智

目　次

1．序論

拙稿 [1] において，量子力学的確率を与える観測過程の確率過程を用いた模型が提案された。しかし，提示の仕方が洗練されておらず，論旨が明快に伝わらないところがあるので，本稿では，その模型の提示の仕方を見直し，改善を図ることが目的の一つである。また，環境の自由度を表わすと想定された単位円盤の自由度について，測定対象系の自由度として測定結果に関与するすべての自由度を表わすという解釈を採用した場合，2 体の複合系の場合に，単位円盤の位相がいわゆる文脈依存性（contextuality）の源であることを示す。

2．量子力学的確率

本稿では，量子力学的確率として，その状態空間の次元が有限である場合に限定する。その次元を N とする。物理的には，観測可能な物理量として，その測定値は高々N 個の異なる値しか持たない場合に限定するということを意味する。$\mathcal{H}$ を量子力学的状態の空間（N 次元 Hilbert 空間）とする。$\hat{A}$ を極大オブザーバブルとして，$\{|\alpha_1\rangle, \ldots, |\alpha_N\rangle\}$ を $\hat{A}$ のスペクトル分解を与える完全正規直交系とする。つまり，$\hat{A} = \sum_{i=1}^N a_i|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|$。同様にして，$\{|\beta_1\rangle, \ldots, |\beta_N\rangle\}$ を完全正規直交系とし，極大オブザーバブル $\hat{B} = \sum_{i=1}^N b_i|\beta_i\rangle\langle\beta_i|$ であるとする。更に，$\{|\rho_1\rangle, \ldots, |\rho_N\rangle\}$ を完全正規直交系とし，極大オブザーバブル $\hat{R} = \sum_{i=1}^N r_i|\rho_i\rangle\langle\rho_i|$ とする。

量子力学的状態 $|\alpha_i\rangle$ の系に $\hat{B}$ の測定を行ったときに，値 b_j が得られる確率は，量子力学的確率論に従って，

$$|\langle\beta_j|\alpha_i\rangle|^2 = \sum_{k,l=1}^{N} \cos(\theta_{\alpha_i,\rho_l} + \theta_{\rho_l,\beta_j} + \theta_{\beta_j,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\alpha_i}) \times|\langle\alpha_i|\rho_l\rangle||\langle\rho_l|\beta_j\rangle||\langle\beta_j|\rho_k\rangle||\langle\rho_k|\alpha_i\rangle|$$

となる。ここで，$\theta_{\alpha_i,\rho_l} := \arg\langle\alpha_i|\rho_l\rangle$, ... である。

キーワード：確率過程，量子力学的確率，Kolmogorov的確率論

添字の組みを元とする $\{1,\ldots,N\}^2$ の部分集合 $I_+(\beta_j|\alpha_i)$ を以下のように定義する。

$$I_+(\beta_j|\alpha_i) :=$$
$$\{(k,l) \mid \cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i}) \geq 0\}.$$

同様に,

$$I_-(\beta_j|\alpha_i) :=$$
$$\{(k,l) \mid \cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i}) < 0\}$$

と定義する。すると,

$$\begin{aligned}
&|\langle\beta_j|\alpha_i\rangle|^2 \\
=& \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} \cos(\theta_{\alpha_i,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\alpha_i}) \\
&|\langle\alpha_i|\rho_l\rangle||\langle\rho_l|\beta_j\rangle||\langle\beta_j|\rho_k\rangle||\langle\rho_k|\alpha_i\rangle| \\
-& \sum_{(k,l)\in I_-(\beta_j|\alpha_i)} |\cos(\theta_{\alpha_i,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\alpha_i})| \\
&|\langle\alpha_i|\rho_l\rangle||\langle\rho_l|\beta_j\rangle||\langle\beta_j|\rho_k\rangle||\langle\rho_k|\alpha_i\rangle| \\
=& \sum_{k=1}^{N} |\langle\beta_j|\rho_k\rangle|^2|\langle\rho_k|\alpha_i\rangle|^2 \\
+& \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i),k\neq l} \cos(\theta_{\alpha_i,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\alpha_i}) \\
&|\langle\alpha_i|\rho_l\rangle||\langle\rho_l|\beta_j\rangle||\langle\beta_j|\rho_k\rangle||\langle\rho_k|\alpha_i\rangle| \\
-& \sum_{(k,l)\in I_-(\beta_j|\alpha_i)} |\cos(\theta_{\alpha_i,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\alpha_i})| \\
&|\langle\alpha_i|\rho_l\rangle||\langle\rho_l|\beta_j\rangle||\langle\beta_j|\rho_k\rangle||\langle\rho_k|\alpha_i\rangle|
\end{aligned}$$

と書ける。第 1 項は古典的な乱歩と解釈可能で，第 2 項と第 3 項は干渉効果を表すと解釈可能である。本稿で提示される模型を使って，この古典的な乱歩にいかにして干渉効果がもたらされるかを解明することを目指す。

3．数学的準備

この節では，測定過程を確率過程で記述するための数学的準備をしよう。シンプレクティック多様体 Σ を測定の対象となる系 S の状態空間とする。2 次元開円盤 \0=$\{e^{i\theta}u \mid \theta \in \mathbb{R},\ 0<u<1\}$ を D と書き， 系 S を取り巻く環境の自由度の一部を表わすものとしよう。$\Xi := \Sigma \times D$ は量子力学的状態の空間に対応するものと解釈しよう。

系 S の観測可能量の集合を，$\mathcal{O}(S)$ で表わす。Σ 上の実関数である $A \in \mathcal{O}(S)$ は、Ξ へと自然に拡張される。実際，$\pi : \Xi \to \Sigma$ を自然な射影として，$\xi \in \Xi$ に対して

$$A(\xi) := A \circ \pi(\xi)$$

と定義すればよい。拡張された A は，D の自由度に依存しない。

系 S とそれを取り巻く環境の自由度の一部の状態は，時間 t とともに発展するので，この変化は

$$x : [t_i, t_f] \to \Xi$$

という Ξ 内の曲線で表現される。x を単純な方程式で規定するのは難しいので，時間を離散化した近似で取り扱うことで x の振る舞いを記述することにしよう。

T と ΔT を $4\Delta T < T$ なる正の実数として，t_1 に対して 5 つの時刻が $t_2 < t_3 < t_4 < t_5 < t_6$ を，

$$\begin{aligned}
t_2 &:= t_1 + \Delta T \\
t_3 &:= t_2 + \Delta T \\
t_4 &:= t_3 + T - 4\Delta T \\
t_5 &:= t_4 + \Delta T \\
t_6 &:= t_5 + \Delta T
\end{aligned}$$

と定義する。

時刻 t_1から 時間間隔 T の間の時間発展 $x : [t_1, t_1+T] \to \Xi$ を

$$(x(t_1), x(t_2), x(t_3), x(t_4), x(t_5), x(t_6)) \in \Xi^6$$

という表現で近似して取り扱う。これに伴って，$[t_i, t_f]$ を $[t_i, t_i+n_f T]$, $n_f \in \mathbb{Z}$ でもって近似する。

$$\Omega := \Pi_{n=0}^{n_f} \Xi^6$$

と定義する。$[t_i, t_i + n_f T]$ の時間発展 $x(\cdot)$ は，$\omega \in \Omega$ で近似される。

以下の表記法を導入する。$\omega \in \Omega$ に対して

$$\omega = (\omega[0], \omega[1], \ldots, \omega[n], \ldots, \omega[n_f]),$$

$$\omega[n] = (\omega^1[n], \omega^2[n], \omega^3[n], \omega^4[n], \omega^5[n], \omega^6[n]).$$

極大オブザーバブルの観測は，測定の文脈 (context) を規定し，系 S は測定の文脈に依存した環境に取り囲まれる。量子力学的確率論では，極大オブザーバブルに付随する完全正規直交系が測定の文脈を表わすが [2]，測定の文脈を表現するものとして，以下のものを採用することにしよう。極大な観測可能量 A に対して，その測定値を $a_1, \ldots, a_N$ とする。極大であることから，これらの測定値は互いに異なる。$i = 1, \ldots, N$ に対して，

$$\alpha_i := \{\xi \in \Xi \mid A(\xi) = a_i\}$$

とおく。A の測定の文脈は，

$$\underline{\alpha} := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$$

により表現される。明らかに，Ξ の部分集合 $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ は互いに共通部分を持たない。

同様にして，$\underline{\beta}$ を極大な観測可能量 B の測定の文脈，$\underline{\rho}$ を極大な観測可能量 R の測定の文脈として，Ω の部分集合を

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k, l)[n] \\
&:= \{\omega \in \Omega \mid \omega^1[n] \in \alpha_i, \\
&\omega^2[n] \in \rho_k, \omega^3[n] \in \beta_j, \omega^4[n] \in \beta_j, \\
&\omega^5[n] \in \rho_l, \omega^6[n] \in \alpha_i\}
\end{aligned}$$

と定義する。

$\mathcal{B}$ を Ω の適切な部分集合の σ-代数とすれば，確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu_x)$ は確率過程 x を表現する。たとえば，$x(t_i + nT) = x^1[n]$ が特定の状態 $\xi \in \Xi$ である確率は

$$\mu_x(\{\omega \in \Omega \mid \omega^1[n] = \xi\})$$

で与えられる。

4．測定前乱歩 x_b，古典的乱歩 x_{cl}，中間乱歩 x_{md}，量子力学的過程 x_q

4．1． 測定前乱歩 x_b

我々は，物理的には系 S は宇宙全体のなかの部分系であって，常にその周りの環境と相互作用しているものであると考えている。その相互作用が無視できるような場合には，系 S は古典力学的力学系と解釈されよう。そうではない場合は，その相互作用の効果も考慮した記述になるであろう。

系 S の測定前の初期状態が α_i 内にあるように保たれるとみなされる場合でも，環境との相互作用が働いているはずである。系 S の状態の変化を精密に辿れば，α_i 内の状態から別の状態へと変化し，その初期状態を保つために再び α_i 内の状態に戻るという過程を繰り返しているかもしれない。そこで，系 S が α_i 内の状態として用意されたとしても，精密にその変化を辿れば，観測可能量の測定が行われなくても，特別な観測可能量 R が安定した測定値になる状態，すなわち $\rho_1, \ldots, \rho_N (\in \underline{\rho})$ 内の状態と初期状態，$\alpha_i (\in \underline{\alpha})$ 内の状態の間を行ったり来たりするという動的な過程であると仮定することにする。この特別な観測可能量 R は，運動量であると考えるのが自然に思われる。なぜなら，環境との相互作用の効果は，確定した運動量の受け渡しを伴うものだからである。

以上の考察に従って，観測可能量の測定をしない場合の系 S の振る舞いは，以下のような条件を満たす確率過程 x_b で記述されると考えられる。任意の $n \in \{0, 1, \ldots, n_f\}$ について，ある $k \in \{1, \ldots, N\}$ が存在して，

$$x_b[n] \in \Lambda_{\alpha_i}^{\rho_k}(k, k)[n] =: \Pi_{\alpha_i}^{\rho_k}[n].$$

この x_b を測定前乱歩と呼ぶことにする。

4.2. 古典的乱歩x_{cl}

我々が観測可能量 B の古典的な測定過程を表わす確率過程として古典的乱歩 x_{cl} と呼ぶものは，以下の条件を満たすものである。

任意の $n \in \{0,1,\ldots,n_f\}$ について，ある $j,k \in \{1,\ldots,N\}$ が存在して，

$$x_{cl}[n] \in \Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,k)[n]$$

というタイプの確率過程で，

$$\begin{aligned}&\mu_{x_{cl}}([x_{cl}[n] \in \Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,k)[n]])\\ =\ & l(\alpha_i|\rho_k)l(\rho_k|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i).\end{aligned}$$

ここで，$l(\cdot|\cdot)$ は，任意の測定の文脈 $\underline{\alpha}$，$\underline{\beta}$ について，$\alpha_i \in \underline{\alpha}$，$\beta_j \in \underline{\beta}$ に対して

- $l(\beta_j|\alpha_i) \geq 0;$
- $\sum_{j=1}^{N} l(\beta_j|\alpha_i)^2 = 1;$
- $l(\beta_j|\alpha_i) = l(\alpha_i|\beta_j)$

を満たすものである。

$l(\alpha_i|\rho_k)^2$ は，α_i から ρ_k への遷移確率と解釈可能である。$l(\rho_k|\beta_j)^2$ は，ρ_k から β_j への遷移確率と解釈可能である。従って，x_{cl} は，$\rho_1,\ldots,\rho_N$ を経由して，α_i から $\beta_1,\ldots,\beta_N$ へ行って α_i に戻ることを繰り返す古典的なランダムウォークである。

4.3. 中間乱歩x_{md}

次に我々が議論するのは，古典的乱歩 x_{cl} と量子力学的な測定過程とのの中間に位置する性質をもった確率過程である。この確率過程を中間乱歩と呼び x_{md} で表わすことにしよう。

x_{md} は以下を満たすものとする。任意の $n \in \{0,1,\ldots,n_f\}$ について，ある j, $(k,l) \in I_+(\beta_j|\alpha_i)$ が存在して，

$$x_{md}[n] \in \Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n]$$

というタイプの確率過程で，

$$\begin{aligned}&\mu_{x_{md}}([x_{md}[n] \in \Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n]])\\ =\ & \frac{1}{N(\underline{\beta}|\alpha_i)}\\ & \times\cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i})\\ & \times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i).\end{aligned}$$

ここで，任意の測定の文脈 $\underline{\alpha}$，$\underline{\beta}$ について $\theta_{\beta_j,\alpha_i}$ 達（$\alpha_i \in \underline{\alpha}$，$\beta_j \in \underline{\beta}$）は

$$\theta_{\beta_j,\alpha_i} = -\theta_{\alpha_i,\beta_j} \tag{1}$$

を満たす実数とする。

θ_{ρ_k,α_i} は，$x_{md}^1[n] \in \alpha_i$ から $x_{md}^2[n] \in \rho_k$ へ遷移したときの D の偏角の変化量を表す。初期状態が D の半径上に一様に分布しているとして，$x_{md}^5[n] \in \rho_l$ から $x_{md}^6[n] \in \alpha_i$ に戻った後に，最初の位相と一致しない場合は，最初の位相の位置に垂直に射影されるという模型を採用すると，D の元の半径上には偏角の変化の総量のコサインだけが戻ることができるので，上の確率が導かれる。

n 番目の時間間隔において，$\Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)$, $(k,l) \in I_+(\beta_j|\alpha_i)$ がすべての可能な状態を覆うということから，

$$\sum_j \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} \mu_{x_{md}}(\Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n]) = 1$$

でなければならない。これより

$$\begin{aligned}&N(\underline{\beta}|\alpha_i)\\ =\ & 1+\\ & \sum_j \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i),k\neq l} \cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}\\ & +\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i})\\ & \times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i)\\ \geq\ & 1\end{aligned}$$

が導かれる。

4.4. 量子力学的過程 x_q

中間乱歩 x_{md} が，$(k,l) \in I_-(\beta_j|\alpha_i)$ である

$$\Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n]$$

という過程も辿ることが可能になるように拡張することを考えよう。前節の D に関する模型を採用すると，$\cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i})<0$ であるので，ρ_l の状態から α_i の状態に戻った後に，射影をしても初期状態の半径とは交わることがないので，元に戻ることができない。このような場合は系 S は存在するが観測不能の状態と解釈し，観測可能な場合は 1，観測不能の場合は 0 という値をとる隠れた変数を導入して，$\Omega_q := \Omega \times \{0,1\}$ と拡張して考えることにする。これは，D の代わりに $D_q := D \times \{0,1\}$ として，$\Xi = \Sigma \times D_q$ から経路の空間 Ω_q を構成すると考えてもよい。

これらの $j,(k,l) \in I_-(\beta_j|\alpha_i)$ に対して，

$$\begin{aligned}
&M_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n] \\
:=\ &\{\omega \in \Omega \times \{0\} \ \mid\ \omega^1[n] \in \alpha_i, \omega^2[n] \in \rho_k, \\
&\omega^3[n] \in \alpha_i, \omega^4[n] \in \alpha_i, \omega^5[n] \in \rho_l, \\
&\omega^6[n] \in \alpha_i\}
\end{aligned}$$

と定義する。

$$\mu_{x_q}(M_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n] \cap \Omega \times \{1\}) = 0$$

であるが，一般に

$$\mu_{x_q}(M_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n] \cap \Omega \times \{0\}) \neq 0$$

であって，観測不可能だからといって系 S が存在しないというわけではない。

$(k,l) \in I_+(\beta_j|\alpha_i)$ のとき，$W_{k,l}(\beta_j|\alpha_i)$ を $0 \le W_{k,l}(\beta_j|\alpha_i) \le 1$ なる実数として，

$$\begin{aligned}
&\mu_{x_q}([x_q[n] \in \Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n]]) \\
=\ &\frac{W_{k,l}(\beta_j|\alpha_i)}{N(\underline{\beta}|\alpha_i)} \\
&\times \cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i}) \\
&\times l(\alpha_i|\rho_l) l(\rho_l|\beta_j) l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_k|\alpha_i)
\end{aligned}$$

とおく。

$(k,l) \in I_-(\beta_j|\alpha_i)$ のとき，

$$\begin{aligned}
&\mu_q([x_q[n] \in M_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n]]) \\
=\ &\frac{1}{N(\underline{\beta}|\alpha_i)} \\
&\times|\cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i})| \\
&\times l(\alpha_i|\rho_l) l(\rho_l|\beta_j) l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_k|\alpha_i)
\end{aligned}$$

とする。

常に系 S が存在し続け，存在の確率が保存されるという条件から，n 番目の時間間隔において，

$$\begin{aligned}
&\sum_j \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} \mu_{x_q}(\Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n]) \\
+\ &\sum_j \sum_{(k,l)\in I_-(\beta_j|\alpha_i)} \mu_{x_q}(M_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n]) \\
=\ &1
\end{aligned}$$

でなければならない。これより，$W_{k,l}(\beta_j,\alpha_i)$ は，

$$\begin{aligned}
&\sum_j \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} W_{k,l}(\beta_j|\alpha_i) \\
&\times \cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i}) \\
&\times l(\alpha_i|\rho_l) l(\rho_l|\beta_j) l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_k|\alpha_i) \\
+\ &\sum_j \sum_{(k,l)\in I_-(\beta_j|\alpha_i)} |\cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j} \\
&+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i})| \\
&\times l(\alpha_i|\rho_l) l(\rho_l|\beta_j) l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_k|\alpha_i) \\
=\ &N(\underline{\beta}|\alpha_i)
\end{aligned}$$

を満たす。

定義 1 $x_{md}[n]$ で $x_{cl}[n]$ にねじれて追加された $\Lambda_{\alpha_i}^{\beta_f}(l,m)[n]$ 達の過程と，$x_q[n]$ で遷移する観測不能な過程 $M_{\alpha_i}^{\beta_j}(o,p)[n]$ 達の過程が同数でバランスがとれるという原理を**均衡原理**と呼ぶ。

均衡原理から，x_{md} においてねじれて増加した状態と x_q における観測できない不安定な

状態の “数”が釣り合う。すなわち,

$$\begin{aligned}&\sum_j \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i),k\neq l} \mu_{x_{md}}(\Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n])\\ =& \sum_j \sum_{(k,l)\in I_-(\beta_j|\alpha_i)} \mu_{x_q}(M_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n])\end{aligned} \tag{2}$$

となる。従って,上式は $1-1/N(\underline{\beta}|\alpha_i)$ だったので,

$$\sum_j \sum_{(k,l)\in I_-(\beta_j|\alpha_i)} \mu_{x_q}([M_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n]) = \frac{N(\underline{\beta}|\alpha_i)-1}{N(\underline{\beta}|\alpha_i)}.$$

非決定論的乱雑さは,T 間隔で生ずると考えて次を要請する:

- $M_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n]$ と $\Lambda_{\alpha_i}^{\beta_{j'}}(k',l')[n']$ は,$n\neq n'$ のとき独立である;
- $M_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n]$ と $M_{\alpha_i}^{\beta_{j'}}(k',l')[n']$ は,$n\neq n'$ のとき独立である。

α_i の状態に対して,b_j の値が観測される確率は,

$$\begin{aligned}&\sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} \mu_{x_q}(\Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n])\\ +& \sum_{j'} \sum_{(k',l')\in I_-(\beta_{j'}|\alpha_i)} \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)}\\ &\mu_{x_q}(M_{\alpha_i}^{\beta_{j'}}(k',l')[n]\cap[\Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n+1])\\ +& \sum_{j'} \sum_{(k',l')\in I_-(\beta_{j'}|\alpha_i)} \sum_{j''} \sum_{(k'',l'')\in I_-(\beta_{j''}|\alpha_i)}\\ &\sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} \mu_{x_q}(M_{\alpha_i}^{\beta_{j'}}(k',l')[n]\\ &\cap M_{\alpha_i}^{\beta_{j''}}(k'',l'')[n+1]\cap\Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n+2])\\ +& \cdots\\ +& \sum_{j'} \sum_{(k',l')\in I_-(\beta_{j'}|\alpha_i)} \cdots \sum_{j'''} \sum_{(k''',l''')\in I_-(\beta_{j'''}|\alpha_i)}\\ &\sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} \mu_{x_q}(M_{\alpha_i}^{\beta_{j'}}(k',l')[n]\cap\cdots\cap\\ &M_{\alpha_i}^{\beta_{j'''}}(k''',l''')[n+m]\cap\Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n+m+1])\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=& \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} \mu_{x_q}(\Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n])\\ &\times\frac{1-\left(\sum_{j'}\sum_{(k,l)\in I_-(\beta_{j'}|\alpha_i)}\mu_{x_q}(M_{\alpha_i}^{\beta_{j'}}(k,l)[n])\right)^m}{1-\sum_{j'}\sum_{(k,l)\in I_-(\beta_{j'}|\alpha_i)}\mu_{x_q}([M_{\alpha_i}^{\beta_{j'}}(k,l)[n])}\\ =& \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} \mu_{x_q}(\Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n])\\ &\times\frac{1-\left((N(\underline{\beta}|\alpha_i)-1)/N(\underline{\beta}|\alpha_i)\right)^m}{1-(N(\underline{\beta}|\alpha_i)-1)/N(\underline{\beta}|\alpha_i)}\\ =& \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} \mu_{x_q}(\Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n])\\ &\times N(\underline{\beta}|\alpha_i)\frac{1-\left((N(\underline{\beta}|\alpha_i)-1)/N(\underline{\beta}|\alpha_i)\right)^m}{N(\underline{\beta}|\alpha_i)-(N(\underline{\beta}|\alpha_i)-1)}\\ =& \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} \mu_{x_q}(\Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)[n])\\ &\times N(\underline{\beta}|\alpha_i)\left(1-\left((N(\underline{\beta}|\alpha_i)-1)/N(\underline{\beta}|\alpha_i)\right)^m\right).\end{aligned}$$

量子力学的確率を再現するには,$m\to\infty$ という極限と取ることと,$W_{k,l}(\beta_j|\alpha_i)$ を以下を満たすように選ぶことで,十分である。各 j について,

$$\begin{aligned}&\sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} W_{k,l}(\beta_j|\alpha_i)\\ &\times\cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i})\\ &\times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i)\\ =& \sum_{k,l}\cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i})\\ &\times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i).\end{aligned}$$

この $W_{k,l}(\beta_j|\alpha_i)$ に対する条件は,均衡原理と整合することに注意しよう。

実際,これらを仮定すると,α_i の状態に対

して，b_j の値が観測される確率は，

$$\begin{aligned}
&\sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} W_{k,l}(\beta_j|\alpha_i)\\
&\cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i})\\
&\times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i)\\
&\times\left(1-\left((N(\underline{\beta}|\alpha_i)-1)/N(\underline{\beta}|\alpha_i)\right)^m\right)\\
= &\sum_{k,l}\cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i})\\
&\times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i)\\
&\times\left(1-\left((N(\underline{\beta}|\alpha_i)-1)/N(\underline{\beta}|\alpha_i)\right)^m\right)\\
\sim &\sum_{k,l}\cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i})\\
&\times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i)\\
&\qquad\qquad (m\to\infty).
\end{aligned}$$

2 節の計算から明らかであるように，これと状態ヴェクトルを使った形式との関係は次の対応によって与えられる: 任意の測定の文脈 $\underline{\alpha}$，$\underline{\beta}$ について，$\alpha_i\in\underline{\alpha}$，$\beta_j\in\underline{\beta}$ に対して

$$\langle\beta_j|\alpha_i\rangle = l(\beta_j|\alpha_i)\mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j,\alpha_i}}.$$

以上は，拙稿 [1] の結果をより洗練して書き直したものである。

5．複合系

量子力学的観測過程が，確率過程で表現できたのであるから，確率過程 x_q のサンプル経路は，系 S の実在論的な状態変化の記述を与える。EPR 型の思考実験 [3, 4] において，この実在論的な記述が局所性を持ちうるかは，興味深い話題である。

$S^{\mathrm{I+II}}$ は，系 S^{I} と系 S^{II} の複合系とする。系 S^{I} 単独で，観測可能量 B^{I} を測定する場合は，その状態空間として，$\Xi^{\mathrm{I}}:=\Sigma^{\mathrm{I}}\times D_q$ とすることになる。系 S^{II} についても同様で，状態空間は，$\Xi^{\mathrm{II}}:=\Sigma^{\mathrm{II}}\times D_q$ となる。さて，D_q は対象となる系の周りの環境の自由度の一部と解釈してきたのであるから，$S^{\mathrm{I+II}}$ の状態空間は，$\Xi^{\mathrm{I+II}}:=\Sigma^{\mathrm{I}}\times\Sigma^{\mathrm{II}}\times D_q$ とすべきであって，$\Xi^{\mathrm{I}}\times\Xi^{\mathrm{II}}$ ではない。$\Xi^{\mathrm{I}}\times\Xi^{\mathrm{II}}$ の部分集合

$$\{(\xi^{\mathrm{I}},\xi^{\mathrm{II}})\in\Xi^{\mathrm{I}}\times\Xi^{\mathrm{II}}\mid\pi_{D_q}(\xi^{\mathrm{I}})=\pi_{D_q}(\xi^{\mathrm{II}})\}$$

は，$\Xi^{\mathrm{I+II}}$ と同一視される。ここで，π_{D_q} は D_q への射影である。

観測可能量 B は，$B=B^{\mathrm{I}}\cdot B^{\mathrm{II}}$ というように，$B^{\mathrm{I}}\in\mathcal{O}(S^{\mathrm{I}})$ と $B^{\mathrm{II}}\in\mathcal{O}(S^{\mathrm{II}})$ の積であるとしよう。$\underline{\beta}=\underline{\beta}^{\mathrm{I}}\times\underline{\beta}^{\mathrm{II}}$ と書くことにする。$j=(j',j'')$ として，$\beta_j=\beta^{\mathrm{I}}_{j'}\times\beta^{\mathrm{II}}_{j''}\cap\Xi^{\mathrm{I+II}}$ である。

観測前の初期状態が $|\alpha^{\mathrm{I}}_{i^{\mathrm{I}}}\rangle\otimes|\alpha^{\mathrm{II}}_{i^{\mathrm{II}}}\rangle$ に対応する状態であるならば，$i=(i',i'')$ として，$\alpha_i=\alpha^{\mathrm{I}}_{i'}\times\alpha^{\mathrm{II}}_{i''}\cap\Xi^{\mathrm{I+II}}$ のように α^{I}_i と α^{II}_i の直積である。状態ヴェクトル形式と我々の模型の間には

$$\langle\alpha_i|\beta_j\rangle = l(\alpha_i|\beta_j)\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i,\beta_j}}$$

という関係があるので，

$$l(\beta_j|\alpha_i)=l(\beta^{\mathrm{I}}_{j'}|\alpha^{\mathrm{I}}_{i'})l(\beta^{\mathrm{II}}_{j''}|\alpha^{\mathrm{II}}_{i''})$$

$$\theta_{\alpha_i,\beta_j}=\theta_{\alpha^{\mathrm{I}}_{i'},\beta^{\mathrm{I}}_{j'}}+\theta_{\alpha^{\mathrm{II}}_{i''},\beta^{\mathrm{II}}_{j''}}.$$

という関係が成り立つ。

系 S^{II} の測定が行われない場合は，以下に述べる理由によって，$\underline{\beta}^{\mathrm{II}}=\underline{\rho}^{\mathrm{II}}$ である場合と考えてよい。この場合，$l(\rho^{\mathrm{II}}_{k''}|\beta^{\mathrm{II}}_{j''})=\delta_{k'',j''}l(\rho^{\mathrm{II}}_{k''}|\beta^{\mathrm{II}}_{j''})$ である。$k''=j''=l''$ の場合，

$$\theta_{\alpha^{\mathrm{II}}_{i''},\rho^{\mathrm{II}}_{k''}}+\theta_{\rho^{\mathrm{II}}_{k''},\beta^{\mathrm{II}}_{j''}}+\theta_{\beta^{\mathrm{II}}_{j''},\rho^{\mathrm{II}}_{l''}}+\theta_{\rho^{\mathrm{II}}_{l''},\alpha^{\mathrm{II}}_{i''}}=0$$

であるので，結果として

$$\begin{aligned}
&\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i}\\
&=\theta_{\alpha^{\mathrm{I}}_{i'},\rho^{\mathrm{I}}_{k'}}+\theta_{\rho^{\mathrm{I}}_{k'},\beta^{\mathrm{I}}_{j'}}+\theta_{\beta^{\mathrm{I}}_{j'},\rho^{\mathrm{I}}_{l'}}+\theta_{\rho^{\mathrm{I}}_{l'},\alpha^{\mathrm{I}}_{i'}} \quad (3)
\end{aligned}$$

となる。従って，この場合は，$I_\pm(\beta_j|\alpha_i)$ の $\underline{\rho}^{\mathrm{I}}$ の添字への射影は $I_\pm(\beta^{\mathrm{I}}_{j'}|\alpha^{\mathrm{I}}_{i'})$ と一致する。従って，B^{I} の測定結果は，系 S^{I} について測定を行った場合と，複合系 $S^{\mathrm{I+II}}$ について測定を行った場合で一致する。

系 S^{II} の測定が行われる場合は，$\underline{\beta}^{\mathrm{I+II}} = \underline{\beta}^{\mathrm{I}} \times \underline{\beta}^{\mathrm{II}}$ である。この場合は，一般に $\Lambda_{\alpha_i}^{\beta_j} \neq \Lambda_{\alpha^{\mathrm{I}}_{i'}}^{\beta^{\mathrm{I}}_{j'}} \times \Lambda_{\alpha^{\mathrm{II}}_{i''}}^{\beta^{\mathrm{II}}_{j''}}$ であるので，B^{I} の測定結果の文脈依存性 [5] を示しているかのように思われる。しかし，これはお化けが出そうな気味の悪い非局所性を意味しない可能性が残されている。なぜなら，D_q の自由度は，$\Xi^{\mathrm{I}} = \Sigma^{\mathrm{I}} \times D_q$ と $\Xi^{\mathrm{I+II}} = \Sigma^{\mathrm{I}} \times \Sigma^{\mathrm{I}} \times D_q$ とでは，物理的には異なる環境の自由度を表し得るからで，Ξ^{I} をと $\Xi^{\mathrm{I+II}}$ の部分空間と同定することができないからである。

観測前の初期状態が $|\alpha^{\mathrm{I}}_{i^{\mathrm{I}}}\rangle \otimes |\alpha^{\mathrm{II}}_{i^{\mathrm{II}}}\rangle$ のような積でない場合は，B^{II} を測定しない測定の文脈 $\underline{\beta}^{\mathrm{I}} \times \underline{\rho}^{\mathrm{II}}$ の場合に，(3) 式のような位相の分離が一般には成り立たない。この場合，B^{I} の測定を系 S^{I} だけについて行った場合を x^{I}_q で表現すること自体が難しい。通常の量子力学の場合は，系 S^{I} の密度演算子は，系 $S^{\mathrm{I+II}}$ の密度演算子の部分トレースをとることで得られるが，我々の模型では部分トレースに相当する仕組みがないからである。

EPR 型の思考実験で問題となるのは，スピンのシングレット状態のように観測前の初期状態が積で書けない，いわゆるエンタングルド状態の場合である [6, 4]。我々の模型では，積で書ける場合にも測定の文脈依存性が現れるように見えるのだが，それは $\Xi^{\mathrm{I+II}}$ と $\Xi^{\mathrm{I}} \times \Xi^{\mathrm{II}}$ の間違った同一視が原因と思われる。複合系とその要素である系の正しい対応関係をもたらす D_q の解釈が見つかれば，非局所性の問題にも新しい見方が得られることが期待される。

[参考文献]

[1] 内山　智,“均衡原理と量子力学的確率”, 北星学園大学短期大学部北星論集, **9**,33–41 (2011).

[2] S. Uchiyama, “On sufficient conditions of a measure-theoretic probability model of measurements describing quantum-mechanical probability”, *Journal of Hokusei Jr. Col.*, **35**, 193-204 (1999).

[3] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).

[4] S. Uchiyama, “Local Reality: Can It Exist in the EPR–Bohm Gedanken Experiment?”, *Found. Phys.* , **25** (1995) 1561–1575.

[5] S. Uchiyama, “On Characteristics of Quantum-Mechanical Measurements”, *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*, **17**, 31–45 (2009).

[6] M. Redhead, “ *Incompleteness, Nonlocality, and Realism – a prolegomenon to the philosophy of quantum mechanics*”, (Clarendon Press, Oxford, 1987) [石垣寿郎訳「不完全性･非局所性･実在主義 – 量子力学の哲学序説」(みすず書房, 1997)].

[Abstract]

Treatment of Composite Systems by Quantum-Mechanical Processes Based on the Balance Principle

Satoshi UCHIYAMA

A quantum-mechanical process which is a mathematical model reproducing quantum-mechanical probabilities based on the balance principle is reformulated in a more sophisticated manner than before. With this new formulation, the distinctions of a classical random walk, an intermediate random walk, and a quantum-mechanical process are made clear. The model of the quantum-mechanical process is applied to a composite system consisting of two systems. It is shown that the phase of the unit disk which represents a part of the degrees of freedom of the environment surrounding the composite system is the source of the contextuality of measurement.

Key words： Stochastic Process, Quantum-mechanical Probability,
Kolmogorovian Proba-bility Theory