北星学園大学短期大学部北星論集第９号(通巻第47号)(2011年３月)・抜刷

均衡原理と量子力学的確率

内　山　　　智

均衡原理と量子力学的確率

内　山　　　智

目　次

1．序論

量子力学的確率は，観測結果の確率的ふるまいの記述であって，観測以前の対象となる物理系の状態を記述するものではない。この解釈は，正統解釈である所謂コペンハーゲン解釈とは異なる解釈である。物理学が経験の背後にある実在を探求する学問であるならば，コペンハーゲン解釈を超えて，如何にして，量子力学的確率が産みだされるのかを明かにすることが必要である。Hilbert 空間を使った量子力学的状態と確率，あるいは量子確率論は，一般に Kolmogorov 的確率論では再現不可能であると言われる。これは文脈に依存しない隠れた変数の非存在の証明 [1, 2] を根拠としている。本稿で提示する模型は，測定の文脈に依存した隠れた変数模型の一つであるが，その文脈依存性が如何にして生ずるかについて示唆を与えるものである。この模型では，状態ヴェクトルの位相の存在は，対象の状態に円板 D の自由度を持つことと，測定においてその自由度の非自明な接続の存在に由来する。また，量子力学的な確率の干渉は，測定による“ねじれた”擾乱とそれを打ち消して初期状態に戻る安定化作用が，均衡原理に従うことに由来する。この模型は，拙稿 [3] の議論により具体的な内容を与えるものである。

2．古典的な確率模型

Σ で，対象である物理的体系 S のすべての状態の集合を表す。$\mathcal{O}(S)$ で，体系 S の観測可能な物理量の集合を表す。N を $\mathcal{O}(S)$ に属する物理量の測定値の数の最大値とする。簡単のため，N は有限と仮定する。$A \in \mathcal{O}(S)$ の観測値を $a_1, \ldots, a_N$ として，それらすべてが互いに異なるとき，A を極大な観測可能量と呼ぶことにする。D で，複素平面 $\mathbb{C}$ の単位円盤を表すとする。実現可能な状態は，$\Xi \times D \subset \Sigma$ の部分集合とする。

$\underline{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N\}$ は，互いに共通部分を持たない $\Xi \times D$ の部分集合の集合とする。α_i について，以下の条件が成立するとしよう：

- 各々の $i = 1, \ldots, N$ について，$(\xi, u) \in \Xi \times D$ に対して，$(\xi, u) \in \alpha_i$ ならば，任意の $\theta \in \mathbb{R}$ について $(\xi, \mathrm{e}^{i\theta} u) \in \alpha_i$ である。
- $(\xi(t), u(t)) \in \alpha_i$ の時間 t についての変化は動径方向の成分は 0，すなわち D の動径に直交する方向であるとする。

ある物理量 A が存在して，A が極大な観測可能量である（すなわち，測定の値 $a_1, \ldots, a_N$ が互いにすべて異なる）とし，$A\restriction_{\alpha_k} = a_k$ であり，それ以外の測定値が得られないとき，$\underline{\alpha}$ を**測定の文脈**と呼ぶことにする。$\mathcal{S}(S)$ で，体系 S の測定の文脈全体の集合を表す。

キーワード：量子状態の重ね合わせ，量子力学的確率，Kolmogorov的確率論

$\alpha_i \subset A^{-1}(a_i)$ であるので，任意の $u \in D$ に対して $(\xi, u) \in \alpha_i$ なので，$A((\xi, u)) = a_i$ のように α_i 上では $u \in D$ に依存しない。

$\underline{\rho} \in \mathcal{S}(S)$ を特別な測定の文脈とする。

Σ の曲線 $x : \mathbb{R} \to \Sigma$ に対して，$t_0 < t_1 < t_2 < t_3$ である時間パラメータについて，

$$x(t_0) \in \alpha_i, x(t_1) \in \rho_k, x(t_2) \in \rho_k, x(t_3) \in \alpha_i \tag{1}$$

となる経路 $x(t)$, $t_0 \le t \le t_3$，を $\Pi^{\rho_k}_{\alpha_i}(t_0)$ と書く。$T := t_3 - t_0$ とおく。(1) を満たす経路は，複数存在する可能性があるので，それらの見本経路の集団は確率過程として記述できるであろう。このように考えて，$\Pi^{\rho_k}_{\alpha_i}(t_0)$ は，確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の確率過程であると仮定しよう。

測定の前の体系 S の状態は，$\Pi^{\rho_k}_{\alpha_i}(t_0 + nT)$ 達 $(n \in \mathbb{N})$ をつなげた Σ 内の曲線 $x_b(\cdot)$で表されるとする。すなわち，

$$x_b(\cdot) := \big[\cdots, \Pi^{\rho_k}_{\alpha_i}(t_0 + (n-1)T), \Pi^{\rho_{k'}}_{\alpha_i}(t_0 + nT), \Pi^{\rho_{k''}}_{\alpha_i}(t_0 + (n+1)T), \cdots\big].$$

$\Pi^{\rho_k}_{\alpha_i}(t_0 + nT)$ 達は確率過程だから，$x_b(\cdot)$ も確率過程である。つまり，$\omega \in \Omega$ に対して，

$$\begin{aligned} x_b(\cdot;\omega) \;=\; & \big[\cdots, \Pi^{\rho_k}_{\alpha_i}(t_0 + (n-1)T;\omega), \\ & \Pi^{\rho_{k'}}_{\alpha_i}(t_0 + nT;\omega), \\ & \Pi^{\rho_{k''}}_{\alpha_i}(t_0 + (n+1)T;\omega), \cdots\big]. \end{aligned}$$

極大な観測可能量 $B \in \mathcal{O}(S)$ の測定の文脈を $\underline{\beta}$ とする。測定値がb_jである状態の集合 $\beta_j \in \underline{\beta}$ に対して，同様に，$\delta > 0$ として，$t_1 + \delta \le t \le t_2 - \delta$ の間は，$x(t) = \beta_j$ となる経路を $\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k, l)$ で表す。すなわち，

$$\begin{aligned} & x(t_0) \in \alpha_i,\ x(t_1) \in \rho_k,\ x(t_1 + \delta) \in \beta_j, \\ & x(t_2 - \delta) \in \beta_j,\ x(t_2) \in \rho_l, \\ & x(t_3) \in \alpha_i \end{aligned} \tag{2}$$

を満たすものである。$\Pi^{\rho_k}_{\alpha_i}$ が確率過程であったのと同様に$\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k, l)$ も確率過程であるとしよう。

極大な観測可能量 $B \in \mathcal{O}(S)$ の測定による影響をうけると，

$$\begin{aligned} x_{cl}(\cdot) \;:=\; & \big[\cdots, \Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k, k)(t_0 + (n-1)T), \\ & \Lambda^{\beta_{j'}}_{\alpha_i}(k', k')(t_0 + nT), \\ & \Lambda^{\beta_{k''}}_{\alpha_i}(k'', k'')(t_0 + (n+1)T), \cdots\big] \end{aligned}$$

となるであろうから，そう仮定しよう。

$(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の確率過程 $x_{cl}(\cdot, \omega)$ が満たす条件を明らかにしたい。

$l(\alpha_i|\beta_j)$ を

- $l(\alpha_i|\beta_j) = l(\beta_j|\alpha_i)$;
- $\sum_{j=1}^N l(\beta_j|\alpha_i)^2 = 1$;
- $l(\beta_j|\alpha_i) \ge 0$

を満たすとして，$[\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k, k)(t_0)] := \{\omega \in \Omega : x_{cl}(\cdot;\omega) = \Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k, k)(t_0;\omega)\}$ と書いて，

$$\begin{aligned} & P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k, k)(t_0)] | x_{cl}(t_0) \in \alpha_i) \\ & = l(\alpha_i|\rho_k) l(\rho_k|\beta_j) l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_k|\alpha_i) \end{aligned}$$

であると仮定しよう。

命題 1

$$\sum_{j,k=1}^N P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k, k)(t_0)] | x_{cl}(t_0) \in \alpha_i) = 1.$$

証明.

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k} P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k, k)(t_0)] | x_{cl}(t_0) \in \alpha_i) \\ = & \sum_{j,k} l(\alpha_i|\rho_k) l(\rho_k|\beta_j) l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_k|\alpha_i) \\ = & \sum_{j,k} l(\alpha_i|\rho_k)^2 l(\beta_j|\rho_k)^2 \\ = & \sum_k l(\alpha_i|\rho_k)^2 \sum_j l(\beta_j|\rho_k)^2 \\ = & \sum_k l(\rho_k|\alpha_i)^2 = 1. \end{aligned}$$

□

各々の測定の文脈 $\underline{\alpha} \in \mathcal{C}(S)$ に対して，各々の $\alpha_i \in \underline{\alpha}$ について

$$\alpha_i(\theta) \ := \ \{(\xi, u) \in \alpha_i \subset \Xi \times D \\ : u \text{ の D 内での偏角は} \theta\}$$

と定義する。

x_{cl} において，D での同じ偏角の半径内に制限されていると仮定しよう。$\alpha_i(\theta) \to \rho_k(\varphi)$ において偏角の回転量を θ_{α_i,ρ_k} と書く。θ_{α_i,ρ_k} は，初期値 θ には依存しないことも仮定する。すると，$\varphi = \theta_{\alpha_i,\rho_k} + \theta$ である。同様に，$\rho_k(\theta) \to \alpha_i(\varphi)$ において偏角の回転量を θ_{ρ_k,α_i} と書く。θ_{α_i,ρ_k} は，θ には依存しないことも仮定する。すると，$\varphi = \theta_{\rho_k,\alpha_i} + \theta$ である。

$x_{cl}(\cdot) = (\xi(\cdot), u(\cdot)) = \Lambda_{\alpha_i(\theta)}^{\beta_j(\varphi)}(k,l)(t_0)$ においては，$u(\cdot)$ の偏角の変化は，

(1) $\arg u(t_0) = \theta \ (\mathrm{mod}\ \pi)$

(2) $\arg u(t_1) = \theta + \theta_{\alpha_i,\rho_k}$

(3) $\arg u(t_1 + \delta) = \theta + \theta_{\alpha_i,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\beta_j} = \varphi$

(4) $\arg u(t_2 - \delta) = \theta + \theta_{\alpha_i,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\beta_j} = \varphi$

(5) $\arg u(t_2) = \theta + \theta_{\alpha_i,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\beta_j} + \theta_{\beta_j,\rho_l}$

(6) $\arg u(t_3) = \theta + \theta_{\alpha_i,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\beta_j} + \theta_{\beta_j,\rho_l} + \theta_{\rho_l,\alpha_i}$

である。更に，一般には，$\theta + \theta_{\alpha_i,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\beta_j} + \theta_{\beta_j,\rho_l} + \theta_{\rho_l,\alpha_i} \neq \theta$ なので，$\theta_{\alpha_i,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\beta_j} + \theta_{\beta_j,\rho_l} + \theta_{\rho_l,\alpha_i}$ の角度の射影成分のみが $\alpha_i(\theta)$ に戻ることができる。

偏角の回転だけで射影しない場合の $\alpha_i \to \beta_j$ の割合が $l(\beta_j|\alpha_i)$ に比例しているとすると，$\cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\beta_j} + \theta_{\beta_j,\rho_l} + \theta_{\rho_l,\alpha_i}) \geq 0$ の場合は，

$$P\left(\left[\Lambda_{\alpha_i(\theta)}^{\beta_j(\varphi)}(k,l)\right] | x(t_0 + nT) \in \alpha_i(\theta)\right) \\ = \frac{1}{N(\underline{\beta}|\alpha_i)} \\ \times \cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\beta_j} + \theta_{\beta_j,\rho_l} + \theta_{\rho_l,\alpha_i}) \\ \times l(\alpha_i|\rho_l) l(\rho_l|\beta_j) l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_k|\alpha_i).$$

ここで，$N(\underline{\beta}|\alpha_i)$ は正規化定数である。

$\cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\beta_j} + \theta_{\beta_j,\rho_l} + \theta_{\rho_l,\alpha_i}) < 0$ の場合は，半径の線分を横切るものは存在しないので，考察が必要である。また，$\dot{u}(t_0)$ と $\dot{u}(t_3)$ の向きが逆になると解釈できるので，注意しよう。このような α_i, β_j, ρ_k，ρ_l に対しては，$\beta_j(\varphi)$ の φ を $\varphi + \pi$ に変更することで，$\beta_j \to \rho_l \to \alpha_i$ と $\alpha_i \to \rho_k \to \beta_j$ の $\dot{u}$ の向きが揃って，$\Lambda_{\beta_j(\varphi+\pi)}^{\alpha_i}(l,k)$ を表すと解釈できる。

$$P\left(\left[\Lambda_{\beta_j(\varphi+\pi)}^{\alpha_i(\theta)}(l,k)\right] | x(t_0 + nT) \in \alpha_i(\theta)\right) \\ = \frac{1}{N(\underline{\beta}|\alpha_i)} \\ \times \cos(\pi + \theta_{\alpha_i,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\beta_j} + \theta_{\beta_j,\rho_l} + \theta_{\rho_l,\alpha_i}) \\ \times l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_k|\alpha_i) l(\alpha_i|\rho_l) l(\rho_l|\beta_j) \geq 0.$$

$\cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\beta_j} + \theta_{\beta_j,\rho_l} + \theta_{\rho_l,\alpha_i}) < 0$ の場合の $\Lambda_{\alpha_i(\theta)}^{\beta_j(\varphi)}(k,l)$ を $M_{\alpha_i(\theta)}^{\beta_j(\varphi)}(k,l)$ と書くことにする：

$$M_{\alpha_i(\theta)}^{\beta_j(\varphi)}(k,l) := \Lambda_{\beta_j(\varphi+\pi)}^{\alpha_i(\theta)}(l,k). \tag{3}$$

従って，

$$P\left(\left[M_{\alpha_i(\theta)}^{\beta_j(\varphi+\pi)}(k,l)\right] | x(t_0 + nT) \in \alpha_i(\theta)\right) \\ = \frac{1}{N(\underline{\beta}|\alpha_i)} \\ \times \cos(\pi + \theta_{\alpha_i,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\beta_j} + \theta_{\beta_j,\rho_l} + \theta_{\rho_l,\alpha_i}) \\ \times l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_k|\alpha_i) l(\alpha_i|\rho_l) l(\rho_l|\beta_j) \geq 0.$$

$M_{\alpha_i(\theta)}^{\beta_j(\varphi)}(k,l)$ は，$\alpha_i(\theta)$ から $\beta_j(\varphi)$ に変化してただちに $\alpha_i(\theta)$ に戻る過程と解釈できるので，この過程では β_j の状態は不安定で，測定値は得られないというのが我々の解釈である。

$$I_+(\beta_j|\alpha_i) := \{(k,l) \\ : \cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\beta_j} + \theta_{\beta_j,\rho_l} + \theta_{\rho_l,\alpha_i}) \geq 0\}.$$

$$I_-(\beta_j|\alpha_i) := \{(k,l) \\ : \cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\beta_j} + \theta_{\beta_j,\rho_l} + \theta_{\rho_l,\alpha_i}) < 0\}.$$

量子力学での時間反転に対応する条件として，互いに異なる任意の $\alpha_i(\theta)$, $\beta_j(\varphi)$ に対して，

$$\theta_{\beta_j,\alpha_i} = -\theta_{\alpha_i,\beta_j} \tag{4}$$

を仮定しよう。すると，$\theta_{\alpha_i,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\beta_j} + \theta_{\beta_j,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\alpha_i} = 0$ なので，$(k,k) \in I_+(\beta_j|\alpha_i)$ である。x_{cl} の過程では，β_j 達の状態が安定に存在するので，常に b_j 達のどれかの値が測定されると解釈される。

以下では簡単のために，$\alpha_i(\theta)$ の偏角 θ を省略した記法を採用することにする。$x_{cl}(\cdot)$ では，$N(\underline{\beta}|\alpha_i) = 1$ であり，$I_-(\beta_j|\alpha_i) = \emptyset$ なので，

$$\begin{aligned}
&P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,k)]|x_{cl}(t_0+nT) \in \alpha_i)\\
&= l(\alpha_i|\rho_k)l(\rho_k|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i);\\
&P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)]|x_{cl}(t_0+nT) \in \alpha_i)\\
&= 0,\ \text{for } k \neq l;\\
&P([M^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)]|x_{cl}(t_0+nT) \in \alpha_i) = 0
\end{aligned}$$

である。実際，

$$\begin{aligned}
&\sum_j \sum_k P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,k)]|x_{cl}(t_0+nT) \in \alpha_i)\\
= &\sum_j \sum_k l(\alpha_i|\rho_k)^2 l(\rho_k|\beta_j)^2\\
= &\sum_k l(\alpha_i|\rho_k)^2 = 1
\end{aligned}$$

である。

3．量子力学的な測定結果を生む確率模型

量子現象は，

$$\begin{aligned}
x_{cl}(\cdot) \quad := \quad &\Big[\cdots, \Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,k)(t_0+(n-1)T),\\
&\Lambda^{\beta_{j'}}_{\alpha_i}(k',k')(t_0+nT),\\
&\Lambda^{\beta_{j''}}_{\alpha_i}(k'',k'')(t_0+(n+1)T), \cdots\Big]
\end{aligned}$$

に，$\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)$, $k \neq l$ というねじれの擾乱が発生することが原因により引き起こされるというのが，我々の基本的な考え方である。

$(l,m),(l',m') \in I_+(\beta_f|\alpha_i)$ として，$\Lambda^{\beta_f}_{\alpha_i}(l,m)(t_0+nT), \Lambda^{\beta_{f'}}_{\alpha_i}(l',m')(t_0+(n+2)T)$, が途中で追加され，

$$\begin{aligned}
x'_{cl}(\cdot) \quad := \quad &\Big[\cdots, \Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,k)(t_0+(n-1)T),\\
&\Lambda^{\beta_f}_{\alpha_i}(l,m)(t_0+nT),\\
&\Lambda^{\beta_{j'}}_{\alpha_i}(k',k')(t_0+(n+1)T),\\
&\Lambda^{\beta_{f'}}_{\alpha_i}(l',m')(t_0+(n+2)T),\\
&\Lambda^{\beta_{j''}}_{\alpha_i}(k'',k'')(t_0+(n+3)T), \cdots\Big]
\end{aligned}$$

と変更されたとしよう。

x'_{cl} については，

$$\begin{aligned}
&P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,k)(t_0+nT)]|x'_{cl}(t_0+nT) \in \alpha_i)\\
&= l(\alpha_i|\rho_k)l(\rho_k|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i)/N(\underline{\beta}|\alpha_i);\\
&P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)]|x'_{cl}(t_0+nT) \in \alpha_i)\\
&= \cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\beta_j} + \theta_{\beta_j,\rho_l} + \theta_{\rho_l,\alpha_i})\\
&\times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i)/N(\underline{\beta}|\alpha_i),\\
&\quad \text{for } (k,l) \in I_+(\beta_j|\alpha_i);\\
&P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)]|x'_{cl}(t_0+nT) \in \alpha_i)\\
&= 0,\ \text{for } (k,l) \in I_-(\beta_j|\alpha_i);\\
&P([M^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)]|x'_{cl}(t_0+nT) \in \alpha_i) = 0
\end{aligned}$$

である。ここで $N(\underline{\beta}|\alpha_i)$ は

$$\sum_j \sum_{k,l} P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)]|x'_{cl}(t_0+nT) \in \alpha_i) = 1$$

から定まる定数である。

$$\begin{aligned}
&\sum_j \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} \cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k} + \theta_{\rho_k,\beta_j} + \theta_{\beta_j,\rho_l} + \theta_{\rho_l,\alpha_i})\\
&\quad \times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i)/N(\underline{\beta}|\alpha_i) = 1
\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned} & N(\underline{\beta}|\alpha_i) \\ = & \sum_j \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} \\ & \cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i}) \\ & \times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i) \\ = & 1 \\ + & \sum_j \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i),k\neq l} \\ & \cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i}) \\ & \times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i) \\ \geq & 1 \end{aligned}$$

である。

定義 1 x_{cl} にねじれて追加された $\Lambda^{\beta_f}_{\alpha_i}(l,m)(t_0+nT)$ 達と同数の不安定な過程 $M^{\beta_j}_{\alpha_i}(o,p)$ 達に切り替わることで，バランスがとれるという原理を**均衡原理**と呼ぶ。

x'_{cl} に均衡原理が適用されたものを x_q としよう。すなわち，例えば

$$\begin{aligned} x_q(\cdot) \quad := \quad & \Big[\cdots, M^{\beta_j}_{\alpha_i}(o,p)(t_0+(n-1)T), \\ & \Lambda^{\beta_f}_{\alpha_i}(l,m)(t_0+nT), \\ & \Lambda^{\beta_{j'}}_{\alpha_i}(k',k')(t_0+(n+1)T), \\ & M^{\beta_{f'}}_{\alpha_i}(o',p')(t_0+(n+2)T), \\ & \Lambda^{\beta_{j''}}_{\alpha_i}(k'',k'')(t_0+(n+3)T),\cdots\Big] \end{aligned}$$

のようになる。

均衡原理から，x'_{cl} におけるねじれた増加分と x_q における観測できない不安定な状態の数が釣り合う。すなわち，

$$\begin{aligned} & \sum_j \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i),k\neq l} \\ & P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)]|x'_{cl}(t_0+nT)\in\alpha_i) \\ = & \sum_j \sum_{(k,l)\in I_-(\beta_j|\alpha_i)} \\ & P([M^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \end{aligned} \tag{5}$$

となる。従って，

$$\begin{aligned} & \sum_j \sum_{(k,l)\in I_-(\beta_j|\alpha_i)} P([M^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\ = & \frac{N(\underline{\beta}|\alpha_i)-1}{N(\underline{\beta}|\alpha_i)}. \end{aligned} \tag{6}$$

x_q においては，x'_{cl} の $\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)$ のいくつかは，$M^{\beta_{j'}}_{\alpha_i}(k',l')$ になるのであるから，

$$\begin{aligned} & P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\ = & W_{k,l}(\beta_j|\alpha_i) \\ & \times\cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i}) \\ & \times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i)/N(\underline{\beta}|\alpha_i), \\ & \text{for } (k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\ = & 0, \text{ for } (k,l)\in I_-(\beta_j|\alpha_i); \\ & P([M^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\ = & \cos(\pi+\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i}) \\ & \times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i)/N(\underline{\beta}|\alpha_i), \\ & \text{for } (k,l)\in I_-(\beta_j|\alpha_i); \end{aligned}$$

である。ここで，$0\leq W_{k,l}(\beta_j|\alpha_i)\leq 1$ である。確率の条件から

$$\begin{aligned} & \sum_j \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\ & +\sum_j \sum_{(k,l)\in I_-(\beta_j|\alpha_i)} P([M^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\ = & 1 \end{aligned}$$

なので，$W_{k,l}(\beta_j,\alpha_i)$ は，

$$\begin{aligned} & \sum_j \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} W_{k,l}(\beta_j|\alpha_i) \\ & \times\cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i}) \\ & \times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i) \\ & +\sum_j \sum_{(k,l)\in I_-(\beta_j|\alpha_i)} \cos(\pi+\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i}) \\ & \times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i) \\ = & N(\underline{\beta}|\alpha_i) \end{aligned}$$

を満たす。

更に $[M^{\beta_{j'}}_{\alpha_i}(k,l)(t_0 + nT)]$ と $[\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k',l')(t_0 + nT)]$ は独立とする。すなわち，

$$
\begin{aligned}
& P([M^{\beta_{j'}}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)] \\
& \cap[\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k',l')(t_0+(n+1)T)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\
= \ & P([M^{\beta_{j'}}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\
& \times P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k',l')(t_0+nT)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i)
\end{aligned}
$$

を仮定する。

更に $n' \neq n$ の場合，$[M^{\beta_{j'}}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)]$ と $[M^{\beta_j}_{\alpha_i}(k',l')(t_0+n'T)]$ は独立とする。すなわち，

$$
\begin{aligned}
& P([M^{\beta_{j'}}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)] \\
& \cap[M^{\beta_j}_{\alpha_i}(k',l')(t_0+n'T)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\
= \ & P([M^{\beta_{j'}}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)]|x_q(t_0+nT))\times \\
& P([M^{\beta_j}_{\alpha_i}(k',l')(t_0+n'T)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i)
\end{aligned}
$$

を仮定する。

β_j が測定される確率は，$t\in(t_0+nT, t_0+(n+1)T)$ で $\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)$ に見出されるか，$n'>n$ なる n' で $t\in(t_0+(n'-1)T, t_0+n'T)$ まで $M^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)$ が続いて，$t\in(t_0+n'T, t_0+(n'+1)T)$ で $\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)$ に見出されるかであるとしよう。従って，β_j が測定される確率は以下のようである。

$$
\begin{aligned}
& \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\
& + \sum_{j'}\sum_{(k',l')\in I_-(\beta_{j'}|\alpha_i)}\sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} \\
& \quad P([M^{\beta_{j'}}_{\alpha_i}(k',l')(t_0+nT)] \\
& \quad \cap[\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+(n+1)T)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\
& + \sum_{j'}\sum_{(k',l')\in I_-(\beta_{j'}|\alpha_i)}\sum_{j''}\sum_{(k'',l'')\in I_-(\beta_{j''}|\alpha_i)} \\
& \quad \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} \\
& \quad P([M^{\beta_{j'}}_{\alpha_i}(k',l')(t_0+nT)] \\
& \quad \cap[M^{\beta_{j''}}_{\alpha_i}(k'',l'')(t_0+(n+1)T)] \\
& \quad \cap[\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+(n+2)T)]\,|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\
& + \cdots \\
& + \sum_{j'}\sum_{(k',l')\in I_-(\beta_{j'}|\alpha_i)}\cdots\sum_{j'''}\sum_{(k''',l''')\in I_-(\beta_{j'''}|\alpha_i)} \\
& \quad \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} P([M^{\beta_{j'}}_{\alpha_i}(k',l')(t_0+nT)]\cap\cdots \\
& \quad \cap[M^{\beta_{j'''}}_{\alpha_i}(k''',l''')(t_0+(n+m)T)] \\
& \quad \cap[\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+(n+m+1)T)] \\
& \quad |x_q(t_0+nT)\in\alpha_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\
\times & \Bigg(1+\sum_{j'}\sum_{(k,l)\in I_-(\beta_{j'}|\alpha_i)} \\
& P([M^{\beta_{j'}}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\
& +\cdots \\
& +\Bigg(\sum_{j'''}\sum_{(k''',l''')\in I_-(\beta_{j'''}|\alpha_i)} \\
& P([M^{\beta_{j'''}}_{\alpha_i}(k''',l''')(t_0+(n+m)T)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\
& \Bigg)^{m-1}\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} \\
&\quad P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\
&\times \Bigl(1-\Bigl(\sum_{j'}\sum_{(k,l)\in I_-(\beta_{j'}|\alpha_i)} \\
&\quad P([M^{\beta_{j'}}_{\alpha_i}{}'(k,l)(t_0+nT)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i)\Bigr)^m\Bigr) \\
&\quad \Big/\Bigl(1-\sum_{j'}\sum_{(k,l)\in I_-(\beta_{j'}|\alpha_i)} \\
&\quad P([M^{\beta_{j'}}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i)\Bigr).
\end{aligned}
$$

(6) より β_j が測定される確率は，$m\to\infty$ のとき

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\
&\quad\times\left(\frac{1-\bigl((N(\underline{\beta}|\alpha_i)-1)/N(\underline{\beta}|\alpha_i)\bigr)^m}{1-(N(\underline{\beta}|\alpha_i)-1)/N(\underline{\beta}|\alpha_i)}\right) \\
&\sim \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\
&\quad\times\left(\frac{1}{1-(N(\underline{\beta}|\alpha_i)-1)/N(\underline{\beta}|\alpha_i)}\right) \\
&= \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} P([\Lambda^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)(t_0+nT)]|x_q(t_0+nT)\in\alpha_i) \\
&\quad\times N(\underline{\beta}|\alpha_i) \\
&= \sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} W_{k,l}(\beta_j|\alpha_i) \\
&\quad\times\cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i}) \\
&\quad\times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i) \\
&= \sum_{k,l}\cos(\theta_{\alpha_i,\rho_k}+\theta_{\rho_k,\beta_j}+\theta_{\beta_j,\rho_l}+\theta_{\rho_l,\alpha_i}) \\
&\quad\times l(\alpha_i|\rho_l)l(\rho_l|\beta_j)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_k|\alpha_i).
\end{aligned}
$$

m が有限のときは取りこぼしがあるが，$m\to\infty$ で取りこぼしがないものに近づくという解釈がこれで可能である。取りこぼしがないようにしようとすると，量子力学に近づく。

結局，β_j が測定される確率は，

$$
\begin{aligned}
&P\left([\beta_j \text{ が測定される}]|x_q(t_0)\in\alpha_i\right) \\
\sim\ & \frac{1}{2}\sum_{l,m}\mathrm{e}^{i\theta_{\rho_m,\alpha_i}}l(\alpha_i|\rho_m)\mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j,\rho_m}}l(\rho_m|\beta_j) \\
&\times\mathrm{e}^{i\theta_{\rho_l,\beta_j}}l(\beta_j|\rho_l)\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i,\rho_l}}l(\rho_l|\alpha_i) \\
+\ & \frac{1}{2}\sum_{l,m}\mathrm{e}^{-i\theta_{\rho_m,\alpha_i}}l(\alpha_i|\rho_m)\mathrm{e}^{-i\theta_{\beta_j,\rho_m}}l(\rho_m|\beta_j) \\
&\times\mathrm{e}^{-i\theta_{\rho_l,\beta_j}}l(\beta_j|\rho_l)\mathrm{e}^{-i\theta_{\alpha_i,\rho_l}}l(\rho_l|\alpha_i) \\
=\ & \frac{1}{2}\sum_{m}\mathrm{e}^{i\theta_{\rho_m,\alpha_i}}l(\alpha_i|\rho_m)\mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j,\rho_m}}l(\rho_m|\beta_j) \\
&\times\sum_{l}\mathrm{e}^{i\theta_{\rho_l,\beta_j}}l(\beta_j|\rho_l)\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i,\rho_l}}l(\rho_l|\alpha_i) \\
+\ & \frac{1}{2}\sum_{m}\mathrm{e}^{-i\theta_{\rho_m,\alpha_i}}l(\alpha_i|\rho_m)\mathrm{e}^{-i\theta_{\beta_j,\rho_m}}l(\rho_m|\beta_j) \\
&\times\sum_{l}\mathrm{e}^{-i\theta_{\rho_l,\beta_j}}l(\beta_j|\rho_l)\mathrm{e}^{-i\theta_{\alpha_i,\rho_l}}l(\rho_l|\alpha_i) \\
=\ & \left|\sum_{l}\mathrm{e}^{i\theta_{\rho_l,\beta_j}}l(\beta_j|\rho_l)\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i,\rho_l}}l(\rho_l|\alpha_i)\right|^2.
\end{aligned}
$$

さて，

$$
|\rho_k\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},
$$

$$
|\alpha_i\rangle := \begin{pmatrix} l(\rho_1|\alpha_i)\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i,\rho_1}} \\ \vdots \\ l(\rho_k|\alpha_i)\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i,\rho_k}} \\ \vdots \\ l(\rho_N|\alpha_i)\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i,\rho^N}} \end{pmatrix},
$$

$$
|\beta_j\rangle := \begin{pmatrix} l(\rho_1|\beta_j)\mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j,\rho_1}} \\ \vdots \\ l(\rho_k|\beta_j)\mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j,\rho_k}} \\ \vdots \\ l(\rho_N|\beta_j)\mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j,\rho_N}} \end{pmatrix}
$$

とおくと，

$$\langle\beta_j| := |\beta_j\rangle^\dagger = \Big(l(\rho_1|\beta_j)\mathrm{e}^{-i\theta_{\beta_j,\rho_1}} \cdots$$
$$l(\rho_k|\beta_j)\mathrm{e}^{-i\theta_{\beta_j,\rho_k}} \cdots l(\rho_N|\beta_j)\mathrm{e}^{-i\theta_{\beta_j,\rho_N}}\Big)$$

となる。

$$\begin{aligned}\langle\beta_j|\alpha_i\rangle &= \sum_k l(\rho_k|\beta_j)\mathrm{e}^{-i\theta_{\beta_j,\rho_k}} l(\rho_k|\alpha_i)\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i,\rho_k}} \\ &= \sum_k \mathrm{e}^{i\theta_{\rho_k,\beta_j}} l(\beta_j|\rho_k)\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i,\rho_k}} l(\rho_k|\alpha_i)\end{aligned}$$

なので，

$$P\left([\beta_j \text{ が測定される}]|x_q(t_0) \in \alpha_i\right) = |\langle\beta_j|\alpha_i\rangle|^2$$

と書ける。

このようにして，x_q のヴェクトル表現が得られる。ヴェクトルの直交性の意味は，次の命題によって与えられる。

命題 2忠実な測定が行われるとする。すなわち，すべての $n \in \mathbb{N}$ について $x_q(t_0+nT) \in \alpha_i$ であるとき，$P([\alpha_i \text{ が測定される}]|x_q(t_0) \in \alpha_i) = 1$ であるとする。$\beta_j = \alpha_j$ のとき，$j \neq i$ ならば，

$$\langle\alpha_j|\alpha_i\rangle = 0.$$

証明. $\beta_j = \alpha_j$ なので，この状態では $B = b_j$ かつ $A = a_j$ であることになる。忠実な測定器ならば，α_i に用意された状態については，$A = a_i$ という値以外を検出してはならないから，$|\langle\alpha_j|\alpha_i\rangle|^2 = P\left([\alpha_j \text{ が測定される}]|x_q(t_0) = \alpha_i\right) = 0$ である。故に $\langle\alpha_j|\alpha_i\rangle = 0$. □

この模型が要求する確率過程の存在の証明が必要ではあるが，量子力学の非局所性 [4, 5, 6, 7] について何が言えるのかを考察することが重要である。

［参考文献］

［1］A. M. Gleason, “Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space”, *J. Math. & Mech.* **6**, 885 (1957).

［2］S. Kochen and E. P. Specker, “The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics”, *J. Math. & Mech.* **17**, 59 (1967).

［3］S. Uchiyama, “On Characteristics of Quantum-Mechanical Measurements”, *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science,* **17**, 31-45 (2009).

［4］A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? ”, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).

［5］S. Uchiyama, “Local Reality：Can It Exist in the EPR-Bohm Gedanken Experiment?”, *Found. Phys.,* **25** (1995) 1561-1575.

［6］S. Uchiyama, “On a local hidden-variable model with ‘isolato’ hypothesis of the EPR-Bohm Gedanken experiment”, in: *Proceedings of the conference: Quantum theory: reconsideration of foundations-3,* Växjö, Sweden 6-11 june(2005), Andrei Khrennikov (ed.), American Institute of Physics, AIP Conference Proceedings 810, 2-18, (Melville, New York，2006).

［7］L. Accardi, and S. Uchiyama, “Uniqueness of the EPR-chameleon model”, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics,* **11**(2008)1-19.

［Abstract］

The Balance Principle and Quantum-Mechanical Probability

Satoshi UCHIYAMA

A mathematical model which reproduces quantum-mechanical probabilities is proposed. This model is described by a stochastic process which consists of $\Lambda_{\alpha i}^{\beta j}$ processes in which the physical quantity can be measured and $M_{\alpha i}^{\beta j}$ processes in which the physical quantity cannot be measured because of the quick return to the initial state. Interference of the probability amplitude is derived from the fact that $M_{\alpha i}^{\beta j}$ processes canceling the influence of the measurement apparatus obey the balance principle.

Key words：Superposition of Quantum States, Quantum-mechanical Probability, Kolmogorovian Probability Theory