量子重ね合わせ原理の一つの解釈について

内　山　　智

目　次

1．序論

量子力学における特異な特徴の中には，重ね合わせの原理により説明されるものがある。それは確率振幅が重ね合わせにより干渉するというもので，このことにより光や物質波の干渉現象が説明される。こういった干渉現象も，どのような測定の確率が量子現象においてどのようにもたらされるかという問題として捉えなおすことができる。量子力学を古典的な実在論に基づく実在の描像によって再解釈しようという試みの一つとして，筆者は量子力学的状態の成す Hilbert 空間が有限次元の場合にいかなる測定過程があると，量子確率を再現できるかという条件を分析した [1]。量子力学的な観測では，測定される物理量が安定化されるような測定過程において観測されるということが要点であった。しかしながら，重ね合わせの原理で本質的な役割を果たす量子力学的状態の位相については，深い知見は得られなかった。本稿では，量子確率が再現される測定過程がどのようなものであるか，量子力学的状態の位相を測定過程の安定性と関連づけることがどのようにすれば可能かを探索した。

2．一般的な状態の変化の記述

対象系 S は，古典的な力学系を成すとする。対象系 S の状態空間を Σ としよう。Σ はユークリッド空間であるとしよう。この仮定はそれほど特殊なものではない。なぜなら，対象系 S の位相空間であれば，正準変数を使って，自然な仕方で計量を定義してユークリッド空間とすることができるからである。S の状態 φ，$\alpha_i \in \Sigma$ に対して，φ から α_i への状態の変化を考えよう。この状態の変化は，測定器やまわりの環境の影響を対象系 S が受けることによって生ずるものとする。

対象系 S が状態 $\varphi \in \Sigma$ で準備されるとするならば，ある一定の時間間隔において状態 φ で安定的に存在することになる。測定行為が破壊的ではないという場合，それは対象の状態がある一定の時間後に再び元の状態 φ に戻ることを可能とするような状態の変化をもたらすようなものを言うことにしよう。

$\phi(t) \in \Sigma$ で，時刻 t の系 S の状態を表すとしよう。$t_j\,(j=0,1,2,\ldots)$ を状態の変化が一時的に生ずるか終了する時刻とする。t_0 での状態，すなわち初期状態は φ なので，

$$\varphi = \phi(t_0)$$

である。なめらかな観測可能な物理量 $A \in C^\infty(\Sigma)$ の測定値が a_i である状態を α_i とする。破壊的ではない測定過程では，

$$\alpha_i = \phi(t_1)\,;\,\alpha_i = \phi(t),\ t \in [t_1, t_2]\,;\,\varphi = \phi(t_3) \tag{1}$$

キーワード：量子確率論，Kolmogorov 的確率論，量子力学的状態の位相

というように状態が変化して，φに戻るはずである。$\psi(\cdot)$は時間 t をパラメーターとして Σ の曲線を定める。

3．実現可能な測定過程

文献［1］では測定過程は，準備された状態のアンサンブルから測定過程によって安定化された状態のアンサンブルへの写像として表現されたが，本稿では更に進んで，そのような写像を定義する個々の測定過程を取り扱うことにしよう。そのための準備として，実現可能な測定過程をまず定式化しよう。これらの状態の変化は実現される可能性はあるが，後に述べる条件によって，あるものは実現せずに観測には至らないものもあるので，実現可能な測定過程と呼ぶことにする。

量子力学的状態の成す Hilbert 空間は有限次元と仮定して，その次元を N としよう。$k, l = 1, \ldots, N$ とする。破壊的ではない測定過程として実現可能な測定過程は，ある $i = 1, \ldots, N$ が存在して，まずφから α_i への状態の変化を与えるものである。この状態の変化は一通りとは限らず，ちょうど N 種類あり得るとしよう。それらを添字 k で区別することにする。$\alpha_i, \varphi \in \Sigma$ に対して，$\psi_k^{\varphi\to\alpha i}(t)$を$\varphi$から α_i への曲線とする。

$$\psi_k^{\varphi\to\alpha i}(t_0) = \varphi, \qquad \psi_k^{\varphi\to\alpha i}(t_1) = \alpha_i.$$

s を $\mathbb{R}\times\Sigma$ での曲線の長さとして，t の代わりに曲線のパラメーターとしよう。

$$\Psi_k^{\varphi\to\alpha i}(s) := (t(s), \psi_k^{\varphi\to\alpha i}(t(s))) \quad (2)$$

によって，$\mathbb{R}\times\Sigma$ の曲線を定義する。ただし，

$$\left\|\frac{d\Psi_k^{\varphi\to\alpha_i}(s)}{ds}\right\|^2 = \left(\frac{dt(s)}{ds}\right)^2 + \left\|\frac{d\psi_k^{\varphi\to\alpha_i}(t(s))}{ds}\right\|^2 = 1,$$

$$\frac{dt(s)}{ds} \geq 0$$

とする。或いは，

$$\frac{dt}{ds} = \left(\sqrt{1 + \left\|\frac{d\psi_k^{\varphi\to\alpha_i}(t(s))}{dt}\right\|^2}\right)^{-1} \quad (3)$$

である。

時間軸方向の単位ベクトル $\tau := (1, 0)$ との内積を角度 Θ_kを使って

$$\begin{aligned}\cos\Theta_k(s) &:= \left(\tau, \frac{d\Psi_k^{\varphi\to\alpha_i}(s)}{ds}\right) = \frac{dt}{ds} \\ &= \left(\sqrt{1 + \left\|\frac{d\psi_k^{\varphi\to\alpha_i}(t(s))}{dt}\right\|^2}\right)^{-1} \quad (4)\end{aligned}$$

となる。ここで，$(\cdot, \cdot)$は，$\mathbb{R}\times\Sigma$ の内積を表す。

同様にして，

$$\Psi_l^{\alpha_i\to\varphi}(s) := (t(s), \psi_l^{\alpha_i\to\varphi}(t(s))),$$

$$\cos\Phi_l(s) := \left(\tau, \frac{d\Psi_l^{\alpha_i\to\varphi}(s)}{ds}\right) \quad (5)$$

とする。

s_0, s_1, s_2, s_3を各々

$t(s_0) = t_0, t(s_1) = t_1, t(s_2) = t_2, t(s_3) = t_3$

なるものとする。$s_1 \leq s \leq s_2$なる s においては，

$\frac{dt}{ds} = 1$　なので，

$$t(s) = s - s_1 + t_1, t_2 = s_2 - s_1 + t_1$$

である。

これらを繋げて，実現可能な破壊的ではない測定過程は次のように表現できる：

$$\Xi_{k,l}^{\varphi\to\alpha_i}(s) = \begin{cases} \Psi_k^{\varphi\to\alpha_i}(s), & t_0 \leq t(s) < t_1 \\ (t(s), \alpha_i), & t_1 \leq t(s) < t_2 \\ \Psi_l^{\alpha_i\to\varphi}(s), & t_2 \leq t(s) \leq t_3 \end{cases} \quad (6)$$

我々の測定過程に対する第一の要請は，初期状態φについて，測定の文脈 $\underline{\alpha}$ での測定でその測定値が安定する状態 $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ が付随し，$i = 1, \ldots, N$ について一様に$\varphi \to \alpha_i$ から $\alpha_i \to \varphi$と戻るという状態の変化を繰り返すということである。

この要請の背景にある考えは，測定の文脈 $\underline{\alpha}$ という環境にさらされた対象系 S は状態φから $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ のどれかに変化させられようとするが，その変化が破壊的ではない限りにおいてφ自身が安定した状態であるために，再びφに復帰するというものである。観測は測定結果が記録されるということで完結するが，そのためには，$\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ のどれかの状態に比較的長い時間留まることが必要である。

第二の要請として，$k, l = 1, \ldots, N$ については，$\Xi_{k,l}^{\varphi\to\alpha i}$ は実現可能な過程を表し，それは安定した測定過程か，不安定な測定過程のどちらかであるということである。ここでいう実現可能というのは，$\Xi_{k,l}^{\varphi\to\alpha i}$ という状態の変化を引き起こす力が生じて対象系 S に働き得るということである。それが生じた場合の状態の変化は $\Xi_{k,l}^{\varphi\to\alpha i}$ で記述されることになる。

第三の要請として，第一の要請における $\varphi \to \alpha_i \to \varphi$ という測定過程における状態変化は，あるパラメーターの値 s で安定した測定過程 $\Xi_{k,l}^{\varphi\to\alpha i}(s)$ から，不安定な測定過程 $\Xi_{k',l'}^{\varphi\to\alpha i}(s)$ が実現可能ならば，一度だけそれに切り替わることとする。不安定な測定過程に切り替わってしまった場合は，観測値は記録されず，観測はなされない。

4．安定な測定過程と不安定な測定過程

量子力学的な観測を再現しようとするならば，重ね合わせについての解釈が必要であろう。このためには，$\Xi_{k,l}^{\varphi\to\alpha i}$ について前節の要請だけでは，不十分である。重ね合わせの解釈を可能とするには，次の要請を付け加える。

第四の要請として，測定前の初期状態は，φ のまわりにバラついて与えられ，$\Psi_k^{\varphi\to\alpha i}$ から $\Psi_l^{\alpha i\to\varphi}$ へとつながる状態の変化は，$|\cos 2(\Phi_l(s_2) - \Theta_k(s_1))|$ に比例する確率で実現可能とする。

この要請から，$\Xi_{k,l}^{\varphi\to\alpha i}$ で記述可能な測定過程のうちで，$(1 - |\cos 2(\Phi_l(s_2) - \Theta_k(s_1))|)$ の確率で，実現が不可能とされる。この要請の自然な解釈は現段階では不明であるが，成立が不可能というわけではない。もし，$|\cos 2(\Phi_l(s_2) - \Theta_k(s_1))|$ の代わりに $|\cos(\Phi_l(s_2) - \Theta_k(s_1))|$ であるならば，$\mathbb{R} \times \Sigma$ 内の同一平面内において $\Psi_k^{\varphi\to\alpha i}(s_1)$ で帯状に広がった状態のアンサンブルが $\Psi_l^{\alpha i\to\varphi}(s_2)$ で帯状に広がったアンサンブルに射影されたものだけが接続されると考えることで，それを導くことができる。このような幾何学的な構造にヒントがあるものと思われる。

そして第五の要請は，$|\Phi_l(s_2) - \Theta_k(s_1)| \leq \pi/4$ である場合は，$\Xi_{k,l}^{\varphi\to\alpha i}$ は安定した測定過程で，そうでなない場合は不安定な測定過程であるとすることである。

もし，$\Xi_{k,l}^{\varphi\to\alpha i}$ が実現可能な安定した測定過程で，$\Xi_{k',l'}^{\varphi\to\alpha i}$ が実現可能な不安定な測定過程を表すとすると，第三の要請により，$\Xi_{k,l}^{\varphi\to\alpha i}$ はある s で $\Xi_{k',l'}^{\varphi\to\alpha i}(s)$ に切り替わり，不安定な測定過程となり，観測結果を残さないことになる。

5．量子力学的状態の位相についての一つの解釈

量子力学的状態 $|\varphi\rangle$ は，位相をかけた $|\varphi'\rangle := e^{i\theta}|\varphi\rangle$ と同じ状態であるという意味で，位相因子 $e^{i\theta}$ だけ不定性がある。この不定性を量子力学的状態の位相の不定性と呼ぶことにする。

$\{|\beta_1\rangle, \ldots, |\beta_N\rangle\}$ を量子力学的状態のなす Hilbert 空間における一つの完全正規直交系としよう。量子力学的状態は，位相の不定性をともなうが，

$$\arg\langle\alpha_i|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\varphi\rangle - \arg\langle\alpha_i|\beta_l\rangle\langle\beta_l|\varphi\rangle$$

はそのような不定性を持たない量である。この量を前節までの実現可能な測定過程と関連付けることができよう。

- 測定過程として $\Psi_k^{\varphi\to\alpha i}$ が生ずる確率が $|\langle\alpha_i|\beta_k\rangle||\langle\beta_k|\varphi\rangle|$ に比例するとする。
- 測定過程として $\Psi_l^{\alpha i\to\varphi}$ が生ずる確率が $|\langle\varphi|\beta_l\rangle||\langle\beta_l|\alpha_i\rangle|$ に比例するとする。
- $2\Theta_k(s_1) = \arg\langle\alpha_i|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\varphi\rangle$ とおく。
- $2\Phi_l(s_2) = \arg\langle\alpha_i|\beta_l\rangle\langle\beta_l|\varphi\rangle$ とおく。

$-\pi/2 \leq (\arg\langle\alpha_i|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\varphi\rangle)/2 \leq \pi/2$ なので，これは可能である。第五の要請によって，量子力学的状態のいくつかの位相差が，測定過程の安定性と関連づけられることになる。

前節までの五つの要請と上述の代入によって，以下のことが結論される：

(1) $\Xi_{k,k}^{\varphi\to\alpha_i}$ は，

$$|\Phi_k(s_2)-\Theta_k(s_1)| =|\arg\langle\alpha_i|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\varphi\rangle-\arg\langle\alpha_i|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\varphi\rangle|/2 =0<\pi/4$$

なので，安定した測定過程である。$\Xi_{k,k}^{\varphi\to\alpha_i}$ が生ずる確率は，$|\langle\alpha_i|\beta_k\rangle|^2|\langle\beta_k|\varphi\rangle|^2$に比例する。

(2)

$$I_+:=\{(k,l):\cos(\arg\langle\alpha_i|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\varphi\rangle -\arg\langle\alpha_i|\beta_l\rangle\langle\beta_l|\varphi\rangle)\geq 0;\ k\neq l;\ k,l=1,\ldots,N\} \quad (7)$$

とおく。$(k,l)\in I_+$について，$\Xi_{k,l}^{\varphi\to\alpha_i}$ は安定して測定過程を表すことがわかる。この状態変化の生ずる確率は，

$$|\cos(\arg\langle\alpha_i|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\varphi\rangle-\arg\langle\alpha_i|\beta_l\rangle\langle\beta_l|\varphi\rangle)| \times|\langle\alpha_i|\beta_l\rangle||\langle\beta_l|\varphi\rangle||\langle\alpha_i|\beta_k\rangle||\langle\beta_k|\varphi\rangle|$$

に比例する。

(3)

$$I_-:=\{(k,l):\cos(\arg\langle\alpha_i|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\varphi\rangle -\arg\langle\alpha_i|\beta_l\rangle\langle\beta_l|\varphi\rangle)<0;\ k\neq l;\ k,l=1,\ldots,N\} \quad (8)$$

とおく。$(k,l)\in I_-$について，$\Xi_{k,l}^{\varphi\to\alpha_i}$ は不安定な測定過程を表すことがわかる。この状態変化の生ずる確率は，

$$|\cos(\arg\langle\alpha_i|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\varphi\rangle-\arg\langle\alpha_i|\beta_l\rangle\langle\beta_l|\varphi\rangle)| \times|\langle\alpha_i|\beta_l\rangle||\langle\beta_l|\varphi\rangle||\langle\alpha_i|\beta_k\rangle||\langle\beta_k|\varphi\rangle|$$

に比例する。

しかし，$\Xi_{k,k}^{\varphi\to\alpha_i}$ を含めてI_+に関する全てが実現するというわけではない。なぜなら，第三の要請により，不安定な測定過程が実現した場合に，いくつかはそれらに切り替わってしまい，結果として，不安定な測定過程の分だけ，実現する確率が減少するからである。

故に，φ が α_i で観測される確率は，

$$\sum_k|\langle\alpha_i|\beta_k\rangle|^2|\langle\beta_k|\varphi\rangle|^2 +\sum_{(k,l)\in I_+}\cos(\arg\langle\alpha_i|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\varphi\rangle -\arg\langle\alpha_i|\beta_l\rangle\langle\beta_l|\varphi\rangle) \times|\langle\alpha_i|\beta_k\rangle||\langle\beta_k|\varphi\rangle||\langle\varphi|\beta_l\rangle||\langle\beta_l|\alpha_i\rangle| -\sum_{(k,l)\in I_-}|\cos(\arg\langle\alpha_i|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\varphi\rangle -\arg\langle\alpha_i|\beta_l\rangle\langle\beta_l|\varphi\rangle)| \times|\langle\alpha_i|\beta_k\rangle||\langle\beta_k|\varphi\rangle||\langle\varphi|\beta_l\rangle||\langle\beta_l|\alpha_i\rangle|$$

に比例することになる。これは，簡単な計算によって，

$$|\langle\alpha_i|\varphi\rangle|^2=\sum_{k,l}\langle\alpha_i|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\varphi\rangle\langle\varphi|\beta_l\rangle\langle\beta_l|\alpha_i\rangle$$

と等しいことがわかる。

I_+とI_-についての和の項は，しばしば干渉項と呼ばれ，量子力学における重ね合わせの原理を象徴するものと解されている。我々の測定の模型では，これらの項は重ね合わせで打ち消し合うのではなく，安定した測定過程から不安定な測定過程への切り替わりを表していると解釈される。

6．議論

我々の模型の新しいところは，$\Psi_k^{\varphi\to\alpha_i}$ という状態の変化が $|\langle\alpha_i|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\varphi\rangle|$ に比例した確率で与えられるとしているところである。これは量子力学的状態が，$|\varphi\rangle$から$|\beta_k\rangle$へ，そして$|\alpha_i\rangle$へと遷移する過程の確率とは異なる。なぜなら，量子力学においてはそのような確率は，$|\langle\alpha_i|\beta_k\rangle|^2|\langle\beta_k|\varphi\rangle|^2$で与えられるからである。

我々の模型で，実現可能であるが実現されない状態の変化がある。それがどれだけあるかを見積もってみよう。不安定な測定過程に切り替わる効果がないとすると，I_+に関する和において，

$$\sum_{(k,l)\in I_+} (1-\cos(\arg\langle\alpha_i|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\varphi\rangle - \arg\langle\alpha_i|\beta_l\rangle\langle\beta_l|\varphi\rangle)) \times|\langle\alpha_i|\beta_k\rangle||\langle\beta_k|\varphi\rangle||\langle\varphi|\beta_l\rangle||\langle\beta_l|\alpha_i\rangle|$$

に比例した確率で実現されない状態の変化がある。更に，不安定な測定過程に切り替わることによって実現しない状態の変化の割合を加えて，

$$\begin{aligned}
&\sum_{(k,l)\in I_+} (1-\cos(\arg\langle\alpha_i|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\varphi\rangle \\
&-\arg\langle\alpha_i|\beta_l\rangle\langle\beta_l|\varphi\rangle)) \\
&\times|\langle\alpha_i|\beta_k\rangle||\langle\beta_k|\varphi\rangle||\langle\varphi|\beta_l\rangle||\langle\beta_l|\alpha_i\rangle| \\
&+\sum_{(k,l)\in I_-} |\cos(\arg\langle\alpha_i|\beta_k\rangle\langle\beta_k|\varphi\rangle \\
&-\arg\langle\alpha_i|\beta_l\rangle\langle\beta_l|\varphi\rangle)| \\
&\times|\langle\alpha_i|\beta_k\rangle||\langle\beta_k|\varphi\rangle||\langle\varphi|\beta_l\rangle||\langle\beta_l|\alpha_i\rangle| \\
=&\sum_{(k,l)\in I_+} |\langle\alpha_i|\beta_k\rangle||\langle\beta_k|\varphi\rangle||\langle\varphi|\beta_l\rangle||\langle\beta_l|\alpha_i\rangle| \\
&+\sum_k |\langle\alpha_i|\beta_k\rangle|^2|\langle\beta_k|\varphi\rangle|^2 \\
&-|\langle\alpha_i|\varphi\rangle|^2
\end{aligned}$$

に比例した確率で，測定過程として実現されない状態の変化があることになる。可能な観測結果の状態 $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ について和をとると，

$$\begin{aligned}
&\sum_i\sum_{(k,l)\in I_+} |\langle\alpha_i|\beta_k\rangle||\langle\beta_k|\varphi\rangle||\langle\varphi|\beta_l\rangle||\langle\beta_l|\alpha_i\rangle| \\
&+\sum_i\sum_k |\langle\alpha_i|\beta_k\rangle|^2|\langle\beta_k|\varphi\rangle|^2 \\
&-\sum_i |\langle\alpha_i|\varphi\rangle|^2 \\
=&\sum_i\sum_{(k,l)\in I_+} |\langle\alpha_i|\beta_k\rangle||\langle\beta_k|\varphi\rangle||\langle\varphi|\beta_l\rangle||\langle\beta_l|\alpha_i\rangle| \\
&+\sum_k \langle\beta_k|\beta_k\rangle|\langle\beta_k|\varphi\rangle|^2-\langle\varphi|\varphi\rangle \\
=&\sum_i\sum_{(k,l)\in I_+} |\langle\alpha_i|\beta_k\rangle||\langle\beta_k|\varphi\rangle||\langle\varphi|\beta_l\rangle||\langle\beta_l|\alpha_i\rangle| \\
&+\langle\varphi|\varphi\rangle-\langle\varphi|\varphi\rangle \\
=&\sum_i\sum_{(k,l)\in I_+} |\langle\alpha_i|\beta_k\rangle||\langle\beta_k|\varphi\rangle||\langle\varphi|\beta_l\rangle||\langle\beta_l|\alpha_i\rangle|
\end{aligned}$$

となる。

$$\sum_i |\langle\alpha_i|\varphi\rangle|^2=1$$

という規格化がされているので，かなり多くの量の状態の変化が生じているにも関わらず観測されないということになる。これらは不安定な変化として，初期状態 φ に戻らないような変化である。

この観測されない状態の変化がなんらかの形で測定されるものであろうか。少なくとも測定の文脈 $\underline{\alpha}$ では測定は不可能である。ならば，別の測定の文脈 $\underline{\gamma}$ ではどうであろうか。測定は可能であるかもしれないが，今度は $\underline{\alpha}$ で観測された状態の変化が $\underline{\gamma}$ では観測されなくなるものがあってもよい。もし，結局，観測されるものの割合は，二つの測定の文脈で同じということになると，観測されない状態の変化を知ることは実験的には不可能となる。上で行った見積もりでは，別の測定の文脈 $\underline{\gamma}$ では，観測されない変化した状態の量は，$\underline{\alpha}$ の場合と異なるようである。すると，観測されない状態の変化は，測定器と対象系 S との相互作用自体によって生み出されていると解釈しなければならなくなる。

このように解釈された我々の模型を EPR 型の測定の場合にあてはめることは興味深い。筆者が昔に提出した局所的な EPR–Bohm 思考実験の模型［2］は，局所的に生じた状態の変化はどの測定の文脈においても一定の量であるが，その一部だけが観測されるということで量子力学の結果を近似的に再現するものであった。本稿の我々の模型では，量子力学を正確に再現するが，測定の文脈に依存して変化する状態の量が変わるようであり，この測定器との相互作用が局所的なものに限定できるとすることができるかどうかは大事な問題であり，この方向の分析が必要である。

［参考文献］

［1］S. Uchiyama，“On Characteristics of Quantum–Mechanical Measurements”，*Annals of the Japan Association for Philosophy of Science*，17，31－45（2009）.

［2］S. Uchiyama，“Local Reality： Can It Exist in the EPR-Bohm Gedanken Experiment?”，*Found*．*Phys*.，25（1995）1561－1575.

［Abstract］

Analysis of an Interpretation of the Quantum Superposition Principle

Satoshi UCHIYAMA

Quantum-mechanical measurement processes measuring the physical quantity of a physical system are analyzed by using a model of measurement processes based on a classical physical picture of the system. It is shown that if the model satisfies five postulates then it reproduces the quantum probabilities. By relating phases of quantum-mechanical state vectors to the conditions of stability of a measurement process, the model gives a new interpretation of the quantum superposition principle that some realizable measurement processes are not realized due to their instability. How many measuring processes become unstable in the model is also estimated.

Key words: Quantum Probability, Kolmogorovian Probability Theory,
Phase of Quantummechanical State Vector