量子化された観測可能量と対称性

内　山　　　智

目　次

１．量子化された観測可能量を持つ系

ある物理的システムに対してなされる測定の結果が量子化された値のみが得られるという場合，このシステムの記述としてどのような条件が量子確率論の数学的形式をもたらすのかを明らかにするのが，本稿の目的である。

対象となる物理的システムを S で表すことにする。S の状態の空間を Γ で表す。

Γ はシンプレクティック多様体としよう。古典力学的質点系の位相空間はシンプレクティック多様体であるので，それを念頭としているのである。

系 S を完全にコントロールできないならば，測定に際して我々に与えられるのは，S の状態のアンサンブルである。このアンサンブルは Γ 上の確率測度 μ で表現されるものとしよう。厳密に言うならば，確率測度を持たないように提供されるアンサンブルというものもありうるから，これもひとつの仮定である。もし測定に際して準備される系 S の状態を完全にコントロールできるならば，その状態を $\xi_0 \in \Gamma$ とすると，アンサンブルとして確率測度 $\mu = \delta_{\xi_0}$ で記述可能である。ここで δ_{ξ_0} は，$\{\xi_0\}$に台を持つ Dirac 測度である。このように初期状態がアンサンブルで与えられるという仮定は，確率的振る舞いをしない実験，すなわち決定論的な振る舞いをする場合の記述も可能とするものである。

物理量は，対象となる系 S の状態の実関数とする。物理量の集合を$\mathfrak{F}(\Gamma)$と書く。観測可能な物理量の集合を$\mathfrak{O}(S)$で表す。$\mathfrak{O}(S) \subseteq \mathfrak{F}(\Gamma)$であるが，この二つは等しいとは限らない。観測可能な物理量は，測定を通してのみ得られる。従って，観測可能な物理量の測定結果は，測定器の系 M を通して μ の情報を抽出することで得られる。この情報の抽出の過程で，μ は別なものに変化し得る。

測定器 M が異なったとしても，同等の変化を μ に及ぼす別の測定器の系 M'があり得るであろう。μ に同等の変化を及ぼす測定器の系の集合は，**測定の文脈**を決定するといえるであろう。系 S の観測可能な物理量$\mathfrak{O}(S)$の測定の文脈の集合を$\mathfrak{C}(S)$と書くことにする。

$\underline{\alpha} \in \mathfrak{C}(S)$に対して，この測定の文脈で系 S のアンサンブルが変化した結果のアンサンブルを Γ 上の確率測度 $\rho_{\underline{\alpha}}$ で表す。この確率測度の写像は測定の文脈 $\underline{\alpha}$ ごとに定まるので，それを $\kappa_{\underline{\alpha}}$：$\mathrm{Prob}(\Gamma) \rightarrow \mathrm{Prob}(\Gamma)$とする。すると，$\rho_{\underline{\alpha}} = \kappa_{\underline{\alpha}}(\mu)$と書ける。

我々の考察の対象は，観測可能な物理量の測定結果が量子化されるような系 S である。例えば，$A \in \mathfrak{O}(S)$の測定結果として，$a_1, a_2, a_3, \cdots$という値だけが観測可能ということである。従って，A が測定の文脈 $\underline{\alpha} \in \mathfrak{C}(S)$で測定されるとすると，$\mathrm{supp}\,\kappa_{\underline{\alpha}}(\mu) \subseteq \cup_i A^{-1}(a_i)$とならなければならない。

キーワード：量子確率論，Kolmogorov 的確率論，量子化

$\varkappa_{\underline{\alpha}}$がいかなる作用の結果なのかについての考え方は一通りではない。測定器と系Sとの相互作用の結果として系Sの状態が変化するという解釈や，観測値が量子化されない状態のアンサンブルの要素である系Sは，観測結果において捨て去られるという条件付けであるという解釈が，代表的な極端をなし，その中間であるという解釈も可能である。この解釈の問題については，ここでは立ち入らないことにする。本稿の目的はこの両方が可能であることを明確にするためだからである。

２．観測可能量の間の関数的関係

一般に，物理量の間には，関数的関係がある。物理量$A, B\in\mathfrak{F}(\Gamma)$に対して，実関数$F$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$で，$B(\xi)=F(A(\xi)), \forall\xi\in\Gamma$となるものが存在するとき，**$B$ は A で測定可能**と呼ぶことにする。例として，１次元空間内の質量mの質点の古典力学的系について，Aは運動量，Bは運動エネルギーとすると，$F(x)=x^2/(2m)$である。$\mathfrak{O}(S)\subseteq\mathfrak{F}(S)$であるが，$\mathfrak{O}(S)$の要素の測定結果が量子化されるとき，この概念を次のように一般化することができる。

定義１　$A\in\mathfrak{O}(S)$が測定の文脈$\underline{\alpha}\in\mathfrak{C}(S)$で測定可能であり，実関数$F$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$が存在して，任意の準備可能な系$S$のアンサンブル$\mu$について

$$\int_\Gamma d\varkappa_{\underline{\alpha}}(\mu)(\xi)(B(\xi))^n$$
$$=\int_\Gamma d\varkappa_{\underline{\alpha}}(\mu)(\xi)F(A(\xi))^n \tag{1}$$

がすべての$n\in\mathbb{N}$について成立するとき，**量子化された B は A で測定可能**と呼ぶことにする。

定義１は，測定値の統計的性質についても一致せよという強い条件である。測定結果が量子化される場合，$\mathrm{supp}\varkappa_{\underline{\alpha}}(\mu)$上で$B=F(A)$というだけでは，$N$個以下の測定値を持つすべての観測可能量は$N$個の測定値をもつ観測可能量$A$（つまり$A$の量子化された測定値は$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_N$はすべて異なる）と関数的関係が成立してしまうことに注意しよう。実際，Bの量子化された測定値を$b_1, b_2, b_3, \cdots$，とすると（b_iは重複しても良いものとする），$F(x):=\sum_{i=1}^N b_i\chi_{\{a_i\}}(x)$と定義すると$B=F(A)$となるからである。

量子化されたBはAで測定可能ならば，$F(A)$の測定値をBの測定値とみなすことができ，Bの平均値や分散といった統計量をAの測定データから計算することができる。しかし，一般にはBに対してAは一意に定まらない可能性がある。別の測定の文脈$\underline{\gamma}\in\mathfrak{C}(S)$で観測可能な観測可能量$C\in\mathfrak{O}(S)$が存在して$B=G(C)$によって$G(C)$を$B$の測定値とみなすことが可能かもしれない。このとき，更に$F(A(\xi))\neq G(B(\xi))$となる$\xi\in\Gamma$が存在するならば，一見，矛盾が生じてしまうように思えるが，$\xi\notin\mathrm{supp}\varkappa_{\underline{\alpha}}(\mu)\cap\mathrm{supp}\varkappa_{\underline{\gamma}}(\mu)$ならば，矛盾にはならない。量子化された測定値を持つ場合には，測定過程の結果として得られるアンサンブルが何であるかを考慮しないで，物理量だけで議論をするとこのような矛盾におちいる危険性があることを認識しなければならない。

３．量子化された観測可能量の行列表現

量子化された測定値が，最大N個までの観測可能量の集合を$\mathfrak{O}_N(S)\subset\mathfrak{O}(S)$と書くことにする。$A\in\mathfrak{O}_N(S)$の量子化された測定値$a_1, a_2, \cdots, a_N$のすべてが異なるとき，観測可能量$A$は$\mathfrak{O}_N(S)$で**非縮退**であるという。

$\underline{\alpha}\in\mathfrak{C}(S)$で観測可能でありかつ$\mathfrak{O}_N(S)$で非縮退である$A$にたいし，

$$p_i := \varkappa_{\underline{\alpha}}(\mu)(A^{-1}(a_i)), \quad i=1, 2, \cdots, N \tag{2}$$

とおく。$U(\mu, \underline{\alpha})$を $N \times N$ のユニタリー行列とする。

$$\varphi(\mu, \underline{\alpha}) := U(\mu, \underline{\alpha}) \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} \\ \vdots \\ \sqrt{p_N} \end{pmatrix}$$

$$D_{\mathrm{a}} := \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_N \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}(\mu, \underline{\alpha}) := U(\mu, \underline{\alpha}) D_{\mathrm{a}} U(\mu, \underline{\alpha})^{\dagger}$$

とおく。複素ヴェクトル $\varphi=(\varphi_1, \cdots, \varphi_N)^T$ と $\psi=(\psi_1, \cdots, \psi_N)^T$ に対して，

$$(\varphi, \psi) := \sum_{i=1}^{N} \overline{\varphi}_i \psi_i = \varphi^{\dagger} \psi \tag{3}$$

と内積を定義する。すると，$\forall n \in \mathbb{N}$に対して

$$\int_{\Gamma} d\varkappa_{\underline{\alpha}}(\mu) A^n = \Big(\varphi(\mu, \underline{\alpha}), (\hat{A}(\mu, \underline{\alpha}))^n \varphi(\mu, \underline{\alpha})\Big) \tag{4}$$

が成立する。

$\hat{A}(\mu, \underline{\alpha})$は $N \times N$ のエルミート行列である。このように，$\mathfrak{O}_N(S)$で非縮退である A は，行列で表現できる。

$B \in \mathfrak{O}_N(S)$は，量子化された B が A で測定可能であるとしよう。すると実関数 F が存在して，

$$\hat{B}(\mu, \underline{\alpha}) := F(\hat{A}(\mu, \underline{\alpha})) \tag{5}$$

と定義することができる。

$$\int_{\Gamma} d\varkappa_{\underline{\alpha}}(\mu) B^n = \Big(\varphi(\mu, \underline{\alpha}), (\hat{B}(\mu, \underline{\alpha}))^n \varphi(\mu, \underline{\alpha})\Big) \tag{6}$$

は，明らかである。

このように，$\mathfrak{O}_N(S)$の要素は非縮退でなくても，その行列表現を定義することができる。

このように定義される$\mathfrak{O}_N(S)$の行列表現は，このままでは無理矢理に定義されたものと感じられるかもしれない。しかし，以下の条件が満たされるならば，逆に自然なものと思えるであろう。

（条件Ｉ）$\varphi(\mu, \underline{\alpha})$は $\underline{\alpha}$ に依存しない。

（条件II）$\hat{A}(\mu, \underline{\alpha})$は μ に依存しない。

この二つ条件により，$U(\mu, \underline{\alpha})$はどんなユニタリー行列で良いわけではなくなる。

もし測定過程の影響が極めて破壊的であれば，$\underline{\beta} \in \mathfrak{C}(S)$が $\underline{\alpha}$ と異なるとき，$\varphi(\mu, \underline{\alpha})$と $\varphi(\mu, \underline{\beta})$は別のものになるということがあり得よう。条件Ｉはこのような場合を取り除き，測定前に準備された系のアンサンブルが同じものであったという情報を，ヴェクトル$\varphi(\mu, \underline{\alpha})$は保持するという意味を持つ。ヴェクトル $\varphi(\mu, \underline{\alpha})$は測定前の状態に関する情報を表現するものであるとすれば，（条件Ｉ）は自然な要請である。

行列表現の定義において p_i が出発点となっているので，本来の μ の持つ情報の多くが失われている可能性があるということにも注目すべきである。μ と ν が測定によって区別できるならば，その測定の文脈 $\underline{\beta} \in \mathfrak{C}(S)$があって，$\varphi(\mu, \underline{\beta}) \neq \varphi(\nu, \underline{\beta})$でなければならない。そこで，たとえ $\underline{\alpha}$ において μ と ν から得られる p_i が等しくなったとしても，条件Ｉから，$\varphi(\mu, \underline{\alpha}) \neq \varphi(\nu, \underline{\alpha})$でなければならない。つまり，$U(\mu, \underline{\alpha})$は p_i では失われている情報を反映するものである。

（条件II）は，$\hat{A}(\mu, \underline{\alpha})$が観測可能量で，それは準備されるアンサンブル μ とは無関係なものであるということを意味しているのであって，これも自然な条件である。アンサンブルが準備された段階で，どの観測可能な物理量を測定するかが決定される必要はないはずであるからである。

（条件Ｉ）と（条件II）は，測定前に準備されるものの持つ情報と，何が測定されたかと

いう情報がそれぞれヴェクトルと行列に分離して表現されることが可能であるという要請である。（条件Ⅰ）と（条件Ⅱ）が成立しない極めて破壊的な測定操作を取り除く努力をしていったときに残存する測定過程が持つべき一般的な条件が，（条件Ⅰ）と（条件Ⅱ）であると言えよう。

以下では，（条件Ⅰ）と（条件Ⅱ）を要請し，$\varphi(\mu,\underline{\alpha})$は$\varphi(\mu)$，$\hat{A}(\mu,\underline{\alpha})$は$\hat{A}(\underline{\alpha})$のように書くことにする。

命題1　（条件Ⅰ-Ⅱ）のもと，$A\in\mathfrak{O}_N(S)$に対し，$a_1,\cdots,a_N$を可能な測定値とする（重複を許す）。測定結果がほとんど確実にa_iであるアンサンブル$\mu\in\mathrm{Prob}(\Gamma)$のヴェクトル表現$\varphi(\mu)$は，$A$の行列表現$\hat{A}(\underline{\alpha})$の固有値$a_i$の固有ヴェクトルである。

証明．$\mathrm{supp}\,\kappa_{\underline{\alpha}}(\mu)\subseteq A^{-1}(a_i)$であるので，$0=(\varphi(\mu),(\hat{A}(\underline{\alpha})-a_iI)^2\varphi(\mu))=\|(\hat{A}(\underline{\alpha})-a_iI)\varphi(\mu)\|^2$。従って，$\hat{A}(\underline{\alpha})\varphi(\mu)=a_i\varphi(\mu)$。　□

（条件Ⅲ）　$\forall A\in\mathfrak{O}_N(S)$に対し，$A$が測定可能などんな測定の文脈$\underline{\alpha}$についても，任意の測定可能な値$a_i$がほとんど確実に測定されるアンサンブル$\mu_{a_i}\in\mathrm{Prob}(\Gamma)$が準備できる。

（条件Ⅲ）が成立することについては，十分な物理的根拠はない。連続測定というものを認めるならば，Aの測定の結果，a_iという値が得られたならば，その直後にまたAを測定すると，ほとんど確実にa_iとなることは自然と思われている。連続測定により抽出されたアンサンブルは，条件Ⅲの成立を可能にする。

命題2　（条件Ⅰ-Ⅲ）のもと，非縮退な$A\in\mathfrak{O}_N(S)$に対し，Aは測定の文脈$\underline{\alpha}$で測定されるとする。$\alpha_i:=A^{-1}(a_i)\subset\Gamma$とおいて，物理量を$P_i:=\chi_{\alpha_i}$で定義する。$\varphi_{a_i}$を固有値$a_i$の$\hat{A}(\underline{\alpha})$の固有ヴェクトルとする。すると，量子化された$P_i$は$A$で測定可能であり，その行列表現$\hat{P}_i(\underline{\alpha})$は，$\hat{P}_i(\underline{\alpha})=\varphi_{a_i}\otimes\varphi_{a_i}^{\dagger}$である。

証明．$F(x):=\sum_{i=1}^{N}\chi_{\{a_i\}}(x)$と定義すると，$P_i(\xi)=\chi_{\alpha_i}(\xi)=F(A(\xi)),\forall\xi\in\cup_j^N\alpha_j$であるので，量子化された$P_i$は$A$で測定可能である。（条件Ⅲ）より，$\mu_{a_i}$を準備可能なアンサンブルで$A$の測定結果がほとんど確実に$a_i$であるものとすると，$P_i$の測定結果としてほとんど確実に1という値が得られるので，命題1より，ヴェクトル表現$\varphi(\mu_{a_i})$は$\hat{P}_i(\underline{\alpha})$の固有値1の固有ヴェクトルである。同様に$j\neq i$ならば，$\hat{P}_i(\underline{\alpha})\varphi_{a_j}=0$であるので，$\hat{P}_i(\underline{\alpha})$は$\varphi_{a_i}$の張る空間への射影である。　□

命題3　命題2の条件のもと，$i\neq j$に対して，$\hat{P}_i(\underline{\alpha})\hat{P}_j(\underline{\alpha})=0$。

証明．Aがほとんど確実にa_iとなるアンサンブルをμ_{a_i}とすると，$\varphi_{a_i}=\varphi(\mu_{a_i})$として良い。$A$は非縮退であるので，$\varphi_{a_1},\cdots,\varphi_{a_N}$は直交系をなす。すなわち，$i\neq j$ならば，$\varphi_{a_i}\perp\varphi_{a_j}$である。これより，結論が従う。　□

（条件Ⅳ）　$\forall A\in\mathfrak{O}_N(S)$に対し，$A$が測定可能などんな測定の文脈$\underline{\alpha}$についても，$\underline{\alpha}$で測定可能な非縮退な$B\in\mathfrak{O}_N(S)$が存在して，量子化された$A$は$B$で測定可能である。

（条件Ⅴ）　Aが異なる測定の文脈$\underline{\alpha}$と$\underline{\beta}$で測定可能ならば，その測定結果の統計的性質は，測定の文脈のとり方に依存しない。

（条件Ⅳ）は，やや技術的な要請であるが，どのような測定器にも，何らかの非縮退な観測可能量の測定を行う仕組みが組み込まれているという要請と解釈できる。

（条件Ⅴ）は，もし観測可能な物理量 A において，準備されたアンサンブル $\mu\in\mathrm{Prob}(\Gamma)$ が同一であるにも関わらず，統計的性質が測定の文脈に依存してしまうと，それは異なる物理量と判断されるはずで，そういうことはないということに由来する。しかし，異なる測定の文脈において，アンサンブルの同一の要素が必ず測定されるということは含意せず，それよりも弱い要請である。EPR 型の実験に於ける非局所性の主張は，異なる測定の文脈において，アンサンブルの同一の要素が必ず測定されるという（条件Ⅴ）よりも強い前提のもとでなされており，これは議論の余地のある前提である［1］。

命題４　（条件Ⅰ－Ⅴ）のもと，$A\in\mathfrak{Q}_N(S)$に対し，$\hat{A}(\underline{\alpha})$は $\underline{\alpha}$ のとり方に依存しない。

証明．A が測定可能な測定の文脈 $\underline{\beta}\neq\underline{\alpha}$ が存在するとしよう。（条件Ⅳ）より，$\underline{\alpha}$ で測定可能な非縮退な $C\in\mathfrak{Q}_N(S)$と，$\underline{\beta}$ で測定可能な非縮退な $B\in\mathfrak{Q}_N(S)$が存在する。A の測定値 a_i は，C のある測定値 c_j と B のある測定値 b_k により関数関係を使って計算できる。C の測定結果がほとんど確実に c_j となるアンサンブルを μ_{c_j}，B の測定結果がほとんど確実に b_j となるアンサンブルを ν_{b_j} とする。これらのアンサンブルに対して，A の測定結果はほとんど確実に a_i となる。命題１より，$\hat{A}(\underline{\alpha})\varphi(\mu_{c_j})=a_i\varphi(\mu_{c_j})$，$\hat{A}(\underline{\beta})\varphi(\nu_{b_k})=a_i\varphi(\nu_{b_k})$である。

更に，（条件Ⅴ）より，$\varkappa_{\underline{\beta}}(\mu_{c_j})$に対しても A はほとんど確実に a_i という結果を与えるので，

$$
\begin{aligned}
&\|(\hat{A}(\underline{\beta})-a_iI)\varphi(\mu_{c_j})\|^2\\
&=\left(\varphi(\mu_{c_j}),(\hat{A}(\underline{\beta})-a_iI)^2\varphi(\mu_{c_j})\right)\\
&=\int_\Gamma d\varkappa_{\underline{\beta}}(\mu_{c_j})(A-a_iI)^2=0.
\end{aligned}
$$

従って，$\hat{A}(\underline{\beta})\varphi(\mu_{c_j})=a_i\varphi(\mu_{c_j})=\hat{A}(\underline{\alpha})\varphi(\mu_{c_j})$である。これから，$\hat{A}(\underline{\alpha})$の固有値 a_i の固有空間は，$\hat{A}(\underline{\beta})$の固有値 a_i の固有空間に含まれる。i は任意であったので，$\hat{A}(\underline{\alpha})\varphi(\mu_{c_j})=\hat{A}(\underline{\beta})\varphi(\mu_{c_j})$がすべての $j=1,\cdots,N$ について成り立つ。命題３より，$\varphi(\mu_{c_1}),\cdots,\varphi(\mu_{c_N})$は正規直交基底となるので，任意の N 次元ヴェクトル ψ は，$\psi=\sum_{j=1}^{N}f_j\varphi(\mu_{c_j})$と書ける。すると，$\hat{A}(\underline{\alpha})\psi=\Sigma_jf_j\hat{A}(\underline{\beta})\varphi(\mu_{c_j})=\hat{A}(\underline{\beta})\psi$となる。$\psi$ は任意であったので，$\hat{A}(\underline{\alpha})=\hat{A}(\underline{\beta})$が成立する。

□

このように，（条件Ⅰ－Ⅴ）の元では，観測可能な物理量の行列表現には，文脈依存性は消失する。従って，以後は $\hat{A}(\underline{\alpha})$の代わりに，単に $\hat{A}$ と書くことにする。

４．対称性と非可換性

ここまでの我々の考察では，観測可能な物理量の行列表現 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の積の非可換性，すなわち$[\hat{A},\hat{B}]:=\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}\neq0$ に，いかなる意味があるかは十分に解明されていない。この非可換性がどのような場合に導入されることになるかを考察したい。

Γ のシンプレクティック構造（非縮退の２階の閉外微分形式）を ω で表す。滑らかな関数 $f\in\mathfrak{F}(\Gamma)$に対して，Γ 上のハミルトニアン・ヴェクトル場 X_f を，次を満たすものとして定義する：

$$
\omega(X_f,Y)=-Y(f)=-df(Y),\quad\forall Y\in T(\Gamma). \tag{7}
$$

滑らかな関数 $f,g\in\mathfrak{F}(\Gamma)$のポアソン括弧は，

$$
\{f,g\}_{PB}:=X_f(g) \tag{8}
$$

と定義される。

$\xi:[0,\infty)\to\Gamma$ を，Γ 内の滑らかな曲線とする。$\xi(t)$は，時刻 t の系 S の状態を表すので，ξ はその状態の時間発展を記述すると解

釈される。$\xi(t)$の接線ヴェクトルを$(d\xi(t)/dt)$と書いて，

$$\frac{d\xi(t)}{dt}=(X_f)_{\xi(t)} \tag{9}$$

を満たす$f\in\mathfrak{F}(\Gamma)$が存在するとしよう。(9)は，fをハミルトニアンとするハミルトン正準方程式の一般化と解釈される。実際，系Sをn次元の古典力学系とすると，$\Gamma=\mathbb{R}^{2n}$はその位相空間と解釈される。$(p_1,\cdots,p_n,q^1,\cdots,q^n)$を$\Gamma$の正準座標として，$\omega=\sum_{i=1}^{n}dp_i\wedge dq^i$である。

$$X_f=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}-\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right) \tag{10}$$

となるので，(9)は

$$\frac{dq^i(\xi(t))}{dt}=\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)_{\xi(t)},$$
$$\frac{dp_i(\xi(t))}{dt}=-\left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\right)_{\xi(t)}$$

となるからである。

(9)のハミルトニアン・ヴェクトル場X_fに従う曲線ξは，次のような特徴を持つ。それは，fの値を保存するということである。実際，

$$\frac{df(\xi(t))}{dt}=X_f(f)=-\omega(X_f,X_f)=0 \tag{11}$$

である。fをハミルトニアンとする系Sでは，fの値は安定して変化しないということが言える。

さて，観測可能な物理量$A\in\mathfrak{O}(S)$を測定するとき，測定器の系Mと系Sに相互作用が働き，系Sの状態はMの影響を受けて時間発展する場合を考えよう。このとき，系Sの状態は時間発展の特徴はなんであろうか。測定結果がきちんと記録されるためには，物理量Aは変化せずに安定している必要があると考えるのは自然であろう。このように考えると，測定結果が記録されるまでの系Sの実効的ハミルトニアンH_Aは，Aの関数で近似されるようなものではないかと，推測される。すなわち，その関数をhとすると

$$H_A(\xi)=h(A(\xi))+\cdots。 \tag{12}$$

μが準備可能なアンサンブルとしたとき，Mと相互作用してH_Aにより時間発展したアンサンブルμ'もまた，準備可能であると考えてよいものと思われる。このような考察から，次の条件を課すことにしよう。

（条件Ⅵ）$\mu\in\mathrm{Prob}(\Gamma)$が準備された系$S$のアンサンブルを表すとき，$\forall A\in\mathfrak{O}_N(S)$に対し，$\mu$が$A$をハミルトニアンとして時間発展で得られるアンサンブル$\mathrm{Exp}tX_A(\mu)$も準備可能である。

定義2　$\underline{\alpha}\in\mathfrak{C}(S)$で測定可能な物理量$A\in\mathfrak{O}(S)$が，準備可能な任意のアンサンブル$\mu\in\mathrm{Prob}(\Gamma)$と任意の測定の文脈$\underline{\beta}\in\mathfrak{C}(S)$について

$$\int_\Gamma d\kappa_{\underline{\beta}}(\mu)A=\int_\Gamma d\kappa_{\underline{\alpha}}(\mu)A$$

を満たすとき，Aは**不変平均を持つ**という。不変平均を持つ物理量の集合を$\mathfrak{I}(S)$で表す。

定義3　測定の文脈$\underline{\alpha}$で測定可能な$A\in\mathfrak{O}_N(S)$の測定結果がほとんど確実にa_iである系Sの任意のアンサンブル$\mu_{a_i}\in\mathrm{Prob}(\Gamma)$に対して，$\forall t\in[0,\infty)$に対して

$$\kappa_{\underline{\alpha}}\circ\mathrm{Exp}tX_A(\mu_{a_i})=\mathrm{Exp}tX_A\circ\kappa_{\underline{\alpha}}(\mu_{a_i}) \tag{13}$$

が成立するならば，$\kappa_{\underline{\alpha}}$は**第一種の測定**を表現するという。

命題5　$B\in\mathfrak{O}_N(S)$，$\underline{\alpha}\in\mathfrak{C}(S)$に対して，もし$\mathrm{Exp}X_B$が実現可能な状態の変換であるならば，$A\in\mathfrak{O}_N(S)$を$\underline{\alpha}$で測定可能な非縮退なオブザーバブルとし，その測定値を$a_1,\cdots,a_N$とすると，エルミート行列$H(B,\mu_{a_1},\cdots,\mu_{a_N})$が存在して，

$$\varphi(\mathrm{Exp}X_B(\mu_{a_i}))=e^{iH(B,\mu_{a1},\cdots,\mu_{aN})}\varphi(\mu_{a_i}),$$

である($i=1, \cdots, N$)。

証明．$\varphi(\mu_{a_1}), \cdots, \varphi(\mu_{a_N})$は N 次元ヒルベルト空間の基底をなすので，$\varphi(\mathrm{Exp}X_B(\mu_{a_1})), \cdots, \varphi(\mathrm{Exp}X_B(\mu_{aN}))$も基底ならば，そのようなエルミート行列が存在する。 □

命題 6 （条件Ⅰ-Ⅵ）のもと，$\mu_{a_i} \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$で表現される系 S のアンサンブルにおいて，測定の文脈 $\underline{\alpha}$ で測定可能な $A \in \mathfrak{O}_N(S)$の測定結果がほとんど確実に a_i であるとする。このとき，もし $\kappa_{\underline{\alpha}}$ が第一種の測定を表すならば，μ_{a_i} から A をハミルトニアンとした時間発展で得られるアンサンブル $\mathrm{Exp}tX_A(\mu_{a_i})$においても A の測定結果はほとんど確実に a_i である。

証明．$\mathrm{supp}\kappa_{\underline{\alpha}}(\mu_{a_i})$上では $A=a_i$ である。$d(\mathrm{Exp}tX_A)^*A/dt=X_A(A)=\{A, A\}_{PB}=0$ であるので，$\mathrm{suppExp}tX_A(\kappa_{\underline{\alpha}}(\mu_{a_i}))=\mathrm{supp}\kappa_{\underline{\alpha}}(\mathrm{Exp}tX_A(\mu_{a_i}))$上でも $A=a_i$ である。これは，$\mathrm{Exp}tX_A(\mu_{a_i})$に対する A の測定結果は，ほとんど確実に a_i であることを意味する。 □

命題 7 （条件Ⅰ-Ⅵ）のもと，もし $A \in \mathfrak{O}_N(S)$が非縮退であり，かつ A の測定の文脈を $\underline{\alpha}$ としたとき $\kappa_{\underline{\alpha}}$ が第一種の測定を表し，準備可能な各アンサンブル $\mu \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$ごとに $\varphi(\mathrm{Exp}tX_A(\mu))$が $t=0$ で連続ならば，関数 $H:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して，A の測定値がほとんど確実に $a_k(k=1, \cdots, N)$である任意の準備可能なアンサンブル $\mu_{a_k} \in \mathrm{Prob}(\Gamma)$に対して

$$\varphi(\mathrm{Exp}tX_A(\mu_{a_k}))=e^{it\mathrm{H}(\hat{A})}\varphi(\mu_{a_k}).$$

証明．条件Ⅲより，A が非縮退なので，$a_1, \cdots, a_N$ を測定可能値として，$\mu_{a_1}, \cdots, \mu_{a_N}$ を各々の測定値がほとんど確実に得られるアンサンブルを表すとする。すると，$\varphi(\mu_{a_1}), \cdots, \varphi(\mu_{a_N})$は N 次元ヒルベルト空間の正規直交系をなす（命題 3）。

条件Ⅵより，と $\kappa_{\underline{\alpha}}$ が第一種の測定を表すことから，A と t に依存して定まるエルミート行列 $\hat{H}(A, t)$が存在して，$\varphi(\mathrm{Exp}tX_A(\mu_{a_k}))=e^{i\hat{H}(A,t)}\varphi(\mu_{a_k})$，$k=1, \cdots, N$ と書ける。

$\kappa_{\underline{\alpha}}$ が第一種の測定を表すので，

$$\begin{aligned}
&e^{i\hat{H}(A,(t_1+t_2))}\varphi(\mu_{a_k})\\
&=\varphi(\mathrm{Exp}(t_1+t_2)X_A(\mu_{a_k}))\\
&=\varphi(\mathrm{Exp}t_1X_A \circ \mathrm{Exp}t_2X_A(\mu_{a_k}))\\
&=e^{i\hat{H}(A,t_1)}\varphi(\mathrm{Exp}t_2X_A(\mu_{a_k}))\\
&=e^{i\hat{H}(A,t_1)}e^{i\hat{H}(A,t_2)}\varphi(\mu_{a_k}).
\end{aligned}$$

$\varphi(\mu_{a_1}), \cdots, \varphi(\mu_{a_N})$は CONS をなすので，これから

$$e^{i\hat{H}(A,(t_1+t_2))}=e^{i\hat{H}(A,t_1)}e^{i\hat{H}(A,t_2)}$$

である。

$\kappa_{\underline{\alpha}}$ が第一種の測定を表すので，命題 6 より，$\varphi(\mu_{a_k})$は $\hat{H}(A, t)$の固有ヴェクトルである。従って，実関数 $G: \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ が存在して，

$$\hat{H}(A, t)=G(\hat{A}, t)$$

と書ける。従って，

$$e^{iG(\hat{A},t_1+t_2)}=e^{i(G(\hat{A},t_1)+G(\hat{A},t_2))}$$

である。$t_2=0$ とおくと，$e^{iG(\hat{A},0)}=1$ であることがわかる。N が有限なので，$e^{iG(\hat{A},t)}$ は $t=0$ で連続である。従って，$e^{iG(\hat{A},t+\delta t)}e^{-iG(\hat{A},t)}=e^{iG(\hat{A},\delta t)}$ は δt を十分小さくとれば，1 に任意に近づけることができるので，$e^{iG(\hat{A},t)}$ は t に関して連続である。従って，t に関して連続な $G(\hat{A}, t)$を選べるので，そのような $G(\hat{A}, t)$について

$$G(\hat{A}, t_1+t_2)=G(\hat{A}, t_1)+G(\hat{A}, t_2)$$

が成立する。$G(\hat{A}, t)=2G(\hat{A}, t/2)=4G(\hat{A}, t/4)=\cdots=2^nG(\hat{A}, t/2^n)$であるので，$G(\hat{A}, t/2^n)=G(\hat{A}, t)/2^n$ である。よって，$G(\hat{A}, 2^n)=2^nG(\hat{A}, 1)$，$G(\hat{A}, 1/2^n)=(1/2^n)G(\hat{A}, 1)$。したがって，$c_j, d_j=0, 1$ として，

$$G\Big(\hat{A},\ \sum_{j=0}^{n}(c_j2^j+d_j/2^j)\Big)$$
$$=\sum_{j=0}^{n}(c_j2^j+d_j/2^j)G(\hat{A},1).$$

任意の $t\in[0,\infty)$は，$\sum_{j=0}^{n}(c_j2^j+d_j/2^j)$, c_j, $d_j=0$, 1によって近似できるので，$G(\hat{A},t)=tG(\hat{A},1)$．$H(x):=G(x,1)$と置けば，$G(\hat{A},t)=tH(\hat{A})$． □

定義4　もし滑らかな関数 $B\in\mathfrak{F}(\Gamma)$に対して，

- 任意の準備可能なアンサンブル μ に対して，$\nu:=\mathrm{Exp}X_B(\mu)$が準備可能なアンサンブルを表す
- $C:=(\mathrm{Exp}(-X_B))^*A\in\mathfrak{O}_N(S)$
- C が測定可能な測定の文脈 $\underline{\gamma}\in\mathfrak{C}(S)$が存在して，

$$\varkappa_{\underline{\gamma}}(\mu)=\mathrm{Exp}(-X_B)\circ\varkappa_{\underline{\alpha}}\circ\mathrm{Exp}X_B(\mu)$$

であるならば，B は S の**対称性の生成子**と呼ばれる。

命題8　（条件Ⅰ－Ⅵ）のもと，もし，B が S の対称性の生成子ならば，

$$\int_\Gamma d\varkappa_{\underline{\alpha}}(\mathrm{Exp}X_B(\mu))A$$
$$=\int_\Gamma d\varkappa_{\underline{\gamma}}(\mu)(\mathrm{Exp}(-X_B))^*A.$$

証明．

$$\int_\Gamma d\varkappa_{\underline{\alpha}}(\mathrm{Exp}X_B(\mu))A$$
$$=\lim\sum_i\varkappa_{\underline{\alpha}}(\mathrm{Exp}X_B(\mu))(\Delta_i)\times\sup_{x\in\Delta_i}A(x)$$
$$=\lim\sum_i\mathrm{Exp}X_{-B}\circ\varkappa_{\underline{\gamma}}(\mu)(\Delta_i)\times\sup_{x\in\Delta_i}A(x)$$
$$=\lim\sum_i\varkappa_{\underline{\gamma}}(\mu)(\mathrm{Exp}X_{-B}(\Delta_i))\times\sup_{y\in\mathrm{Exp}X_{-B}(\Delta_i)}A(\mathrm{Exp}X_{-B}(y))$$
$$=\lim\sum_i\varkappa_{\underline{\gamma}}(\mu)(\mathrm{Exp}X_{-B}(\Delta_i))\times\sup_{y\in\mathrm{Exp}X_{-B}(\Delta_i)}(\mathrm{Exp}X_{-B})^*A(y)$$
$$=\int_\Gamma d\varkappa_{\underline{\gamma}}(\mu)(\mathrm{Exp}(-X_B))^*A.$$

□

命題9　B を対称性の生成子とし，かつ $\varphi(\mathrm{Exp}tX_B(\mu_{bi}))$が $t=0$ で連続であるとする $(i=1,\cdots,N)$。

すべての準備可能なアンサンブル $\mu\in\mathrm{Prob}(\Gamma)$に対して，$\varphi(\mu)=\sum_{i=1}^{N}c_i\varphi(\mu_{bi})$ならば，$\varphi(\mathrm{Exp}X_B(\mu))=\sum_{i=1}^{N}c_i\varphi(\mathrm{Exp}X_B(\mu_{bi}))$
$\Leftrightarrow$
関数 $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が存在して，$\varphi(\mathrm{Exp}X_B(\mu))=e^{iH(\hat{B})}\varphi(\mu)$。

証明．（⇒）命題7より，H が存在して，$\varphi(\mathrm{Exp}tX_B(\mu_{bi}))=e^{itH(\hat{B})}\varphi(\mu_{bi})$。したがって，

$$\varphi(\mathrm{Exp}X_B(\mu))=\sum_{i=1}^{N}c_i\varphi(\mathrm{Exp}X_B(\mu_{bi}))$$
$$=\sum_{i=1}^{N}c_ie^{iH(\hat{B})}\varphi(\mu_{bi})$$
$$=e^{iH(\hat{B})}\sum_{i=1}^{N}c_i\varphi(\mu_{bi})$$
$$=e^{iH(\hat{B})}\varphi(\mu).$$

（⇐）

$$\varphi(\mathrm{Exp}X_B(\mu))=e^{iH(\hat{B})}\varphi(\mu)$$
$$=e^{iH(\hat{B})}\sum_{i=1}^{N}c_i\varphi(\mu_{bi})$$

$$=\sum_{i=1}^{N} c_i e^{iH(\hat{B})}\varphi(\mu_{b_i})$$
$$=\sum_{i=1}^{N} c_i \varphi(\mathrm{Exp}X_B(\mu_{b_i})).$$

□

この条件は，$H(\hat{B})\varphi(\mu_{b_i})=H(b_i)\varphi(\mu_{b_i})$であることを使うと，

$$\varphi(\mu)=\sum_{i=1}^{N} c_i\varphi(\mu_{b_i})$$
$$\Rightarrow$$
$$\varphi(\mathrm{Exp}X_B(\mu))=\sum_{i=1}^{N} c_i e^{iH(b_i)}\varphi(\mu_{b_i})$$

となる。μ と $\mathrm{Exp}X_B(\mu)$について b_i が得られる確率は等しく $|c_i|^2$ であることを要請していることになる。逆に，この条件が成立しないならば，$\mathrm{Exp}X_B(\mu)$について b_i が得られる確率が $|c_i|^2$ ではないか，または位相の変化が $H(b_i)$ではないような B と i が存在することになる。

φが写像であるためには，一般に $\mathrm{Exp}tX_B(\mu_{b_i})\neq\mu_{b_i}$ でなければならない。なぜなら，$\varphi(\mathrm{Exp}tX_B(\mu_{b_i}))=e^{itH(b_i)}\varphi(\mu_{b_i})\neq\varphi(\mu_{b_i})$だからである。$\mu_{b_i}(\theta):=[\mathrm{Exp}(\theta/H(b_i))X_B](\mu_{b_i})$と定義しよう。もし

$$\varphi(\mu)=\sum_{i=1}^{N} c_i\varphi(\mu_{b_i})$$
$$\Rightarrow$$
$$\varphi(\mathrm{Exp}X_B(\mu))=\sum_{i=1}^{N} c_i e^{iH(b_i)}\varphi(\mu_{b_i})$$

であるとするならば，確率は $|c_i|^2$ で不変なので，B の測定だけでは，μ と $\mathrm{Exp}X_B(\mu)$の違いはわからない。

命題 10　(条件Ⅰ-Ⅵ)のもと，もし，$\underline{\alpha}\in\mathfrak{C}(S)$で測定可能な滑らかな観測可能量 $B\in\mathfrak{O}_N(S)$と $\forall t\in[0,\infty)$に対して，実関数 $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が存在して，

$$\varphi(\mathrm{Exp}tX_B(\mu))=e^{itH(\hat{B})}\varphi(\mu), \tag{14}$$

かつ tB は S の対称性の生成子であるならば，任意の滑らかな $A\in\mathfrak{I}(S)\cap\mathfrak{O}_N(S)$に対して

$$\int_\Gamma d\varkappa_{\underline{\alpha}}(\mu)\{B,A\}_{PB}$$
$$=-\Big(\varphi(\mu),\, i[H(\hat{B}),\hat{A}]\varphi(\mu)\Big) \tag{15}$$

が成立する。

証明．tB が対称性の生成子であるので，

$$\varkappa_{\underline{\gamma}}(\mathrm{Exp}tX_B(\mu))=\mathrm{Exp}tX_B(\varkappa_{\underline{\alpha}}(\mu))。 \tag{16}$$

$$\int_\Gamma d\varkappa_{\underline{\alpha}}(\mu)(\mathrm{Exp}tX_B)^*A$$
$$=\int_\Gamma d\mathrm{Exp}tX_B(\varkappa_{\underline{\alpha}}(\mu))A$$
$$=\int_\Gamma d\varkappa_{\underline{\gamma}}(\mathrm{Exp}tX_B(\mu))A$$
$$=\int_\Gamma d\varkappa_{\underline{\alpha}}(\mathrm{Exp}tX_B(\mu))A$$
$$=\Big(\varphi(\mathrm{Exp}tX_B(\mu)),\,\hat{A}\varphi(\mathrm{Exp}tX_B(\mu))\Big)$$
$$=\Big(e^{itH(\hat{B})}\varphi(\mu),\,\hat{A}e^{itH(\hat{B})}\varphi(\mu)\Big)$$
$$=\Big(\varphi(\mu),\,e^{-itH(\hat{B})}\hat{A}e^{itH(\hat{B})}\varphi(\mu)\Big)$$

となる。これを t に関して微分すると，(15)が得られる。□

一般に，$\{A,B\}_{PB}$ は測定の文脈 $\underline{\alpha}$ に属するとは限らないので，左辺は観測結果の平均値というような物理的な意味を持つとは限らない。数学的に計算できるだけである。同様に，右辺も $\frac{i}{\hbar}[H(\hat{A}),\hat{B}]$が量子化された観測可能な物理量の行列表現とは限らないので，物理的な意味を持たないかもしれないが，数学的な量として計算可能である。それらの計算結果が一致するということが示されている。

系 1　命題 10 の仮定のもと，$\{B,A\}_{PB}\in\mathfrak{I}(S)\cap\mathfrak{O}_N(S)$かつ，$H(x)=x/\hbar$ならば，

$$(\varphi(\mu),\widehat{\{B,A\}}_{PB}\varphi(\mu))$$
$$=\Big(\varphi(\mu),\,-\frac{i}{\hbar}[\hat{B},\hat{A}]\varphi(\mu)\Big).$$

証明．$\{B,A\}_{PB}\in\mathfrak{I}(S)\cap\mathfrak{O}(S)$なので，$\underline{\gamma}\in$

$\mathfrak{C}(S)$が存在して，$\{B, A\}_{PB}$ が $\underline{\gamma}$ で測定可能である。

$$
\begin{aligned}
&(\varphi(\mu), \widehat{\{B, A\}}_{PB}\varphi(\mu)) \\
&=\int_{\Gamma} d\varkappa_{\underline{\gamma}}(\mu)\{B, A\}_{PB} \\
&=\int_{\Gamma} d\varkappa_{\underline{\alpha}}(\mu)\{B, A\}_{PB} \\
&=\left(\varphi(\mu), -\frac{i}{\hbar}[\hat{B}, \hat{A}]\varphi(\mu)\right)。
\end{aligned}
$$

$\square$

［参考文献］

［1］ S. Uchiyama, “Local Reality: Can It Exist in the EPR-Bohm Gedanken Experiment?”, *Found. Phys.*, **25** (1995) 1561–1575.

[Abstract]

Quantized Observables and Symmetries

Satoshi UCHIYAMA

It is suggested that matrix representation of generators of symmetries of a system and quantized observables brings about a noncommutative algebra.

Key words: Quantum Probability, Kolmogorovian Probability Theory, Quantization