量子確率の球面模型とその解釈

内　山　　　智

目次

1．序

量子力学的確率は, 単一の確率空間で記述できないという意味で, Kolmogorov 的確率論とは異なる [1]。このことの物理的解釈は, 異なる観測の文脈に依存して, 測定結果の統計を表現する確率空間が定まるということである。この意味での測定器の観測結果への影響は, 量子力学的確率には不可欠である。しかしながら, 量子力学的確率の数学的形式である量子確率論では, この測定器の影響は, オブザーバブル（確率変数）の非可換性として表現され, 明白なかたちで測定器の影響は記述されていない。このことは, 測定器の観測結果への影響がいかなるものであるかを知ろうとするならば, 量子確率論の数学的形式の枠組みの外へと踏み出さなければならないことを意味する。観測命題の束を非ブール的なものとするという方向の研究では, 測定器の影響はその非ブール性の中に組み込まれてしまうので, 測定器の影響を論ずることができない。それ故, 一般には歴史的遺物と考えられている隠れた変数の導入をせざるを得ないであろう。実際, この隠れた変数の導入による Bell の議論により, 量子力学の非局所性という概念が発見された [2, 3]。より詳細な分析は, この非局所性は見かけのものであり, 遠隔作用が物理的に存在する必要はないことを明らかにしてはいる [4, 5]。

本稿では, 無限次元では様々な難しさがあるので, 簡単のため有限次元の Hilbert 空間を状態ヴェクトルの空間とする量子力学的確率を問題としよう。隠れた変数が存在しないことを証明する no-go 定理とは, 正確には, 文脈非依存的隠れた変数が存在しないこと, すなわち一般には単一の確率空間で量子力学的確率を表現できないということを証明するものである [7, 8]。確率空間が観測するオブザーバブルに依存して決定される隠れた変数の導入は, 数学的には常に可能である [8, 9]。問題はそのように導入された確率変数と確率空間の解釈である。

第 2 節では, 量子力学的確率の単純な隠れた変数模型の導入をする。第 3 節では, その解釈について論ずる。

2．有限次元量子確率の球面上での実現

一対一対応 $\iota : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ を以下により定義する:

$$\iota(\mathbf{z}) := (\Re\mathbf{z}, \Im\mathbf{z}); \qquad \iota^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x} + i\mathbf{y}.$$

Definition 1 $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^{2n}$ の内積を各々次のように定義する*:*

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 := \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n;$$

キーワード : 量子確率 , 隠れた変数 , Kolmogorov 的確率論

$$(\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1)\cdot(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2):=\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2+\mathbf{y}_1\cdot\mathbf{y}_2,\quad (\mathbf{x}_1,\mathbf{y}_1),(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}_2)\in\mathbb{R}^{2n}.$$

命題 1 $\forall\mathbf{z}_1=\mathbf{x}_1+i\mathbf{y}_1,\mathbf{z}_2=\mathbf{x}_2+i\mathbf{y}_2\in\mathbb{C}^n$ に対して，

$$\langle\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2\rangle=\iota(\mathbf{z}_1)\cdot\iota(\mathbf{z}_2)+i\iota(\mathbf{z}_1)\cdot J\iota(\mathbf{z}_2)$$

である。ただし，ここで

$$J:=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

証明。

$$\begin{aligned}&\iota(\mathbf{z}_1)\cdot\iota(\mathbf{z}_2)+i\iota(\mathbf{z}_1)\cdot J\iota(\mathbf{z}_2)\\&=\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2+\mathbf{y}_1\cdot\mathbf{y}_2+i(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1\cdot\mathbf{x}_2)\\&=\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2+(-i)\mathbf{y}_1\cdot(i)\mathbf{y}_2+\mathbf{x}_1\cdot i\mathbf{y}_2\\&-i\mathbf{y}_1\cdot\mathbf{x}_2\\&=(\mathbf{x}_1-i\mathbf{y}_1)\cdot(\mathbf{x}_2+i\mathbf{y}_2)=\langle\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2\rangle.\end{aligned}$$

□

系 1 $\forall\mathbf{z}_1=\mathbf{x}_1+i\mathbf{y}_1,\mathbf{z}_2=\mathbf{x}_2+i\mathbf{y}_2\in\mathbb{C}^n$ に対して，

$$|\langle\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2\rangle|^2=|\iota(\mathbf{z}_1)\cdot\iota(\mathbf{z}_2)|^2+|\iota(\mathbf{z}_1)\cdot J\iota(\mathbf{z}_2)|^2$$

である。

証明。明らか。 □

系 2 ι は等長写像である。

証明。$\iota(\mathbf{z})\cdot J\iota(\mathbf{z})=0$ なので，命題 1 より，$\|\iota(\mathbf{z})\|^2=\iota(\mathbf{z})\cdot\iota(\mathbf{z})=\langle\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle=\|\mathbf{z}\|^2$。

□

命題 2 ι は，次のように $U(\mathbb{C}^n)$ から $O(\mathbb{R}^{2n})$ への単写を誘導する。

$$\begin{aligned}U\in U(\mathbb{C}^n)&\mapsto\iota\circ U\circ\iota^{-1}\\&=\begin{pmatrix}\Re U&-\Im U\\\Im U&\Re U\end{pmatrix}\in O(\mathbb{R}^{2n}).\end{aligned}$$

証明。$\mathbf{x}=\Re\mathbf{z}$ とおくと $\mathbf{y}=\Im\mathbf{z}$ より，

$$\begin{aligned}\iota(U\mathbf{z})&=\iota((\Re U+i\Im U)(\mathbf{x}+i\mathbf{y}))\\&=\iota(\Re U\mathbf{x}-\Im U\mathbf{y}+i\Re U\mathbf{y}+i\Im U\mathbf{x})\\&=(\Re U\mathbf{x}-\Im U\mathbf{y},\Re U\mathbf{y}+\Im U\mathbf{x}).\end{aligned}$$

□

$O(\mathbb{R},2n)$ の部分群

$$G_{\mathbf{z}_0}=\{g\in O(\mathbb{R},2n):\ g\iota(\mathbf{z}_0)=\iota(\mathbf{z}_0)\}$$

は，$\mathbf{z}_0$ に関する等方部分群と呼ばれる。単位球は

$$S^{2n-1}(\mathbb{R})=\{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbb{R}^{2n}:\ \|(\mathbf{x},\mathbf{y})\|=1\}$$

と定義される。

$$O(\mathbb{R},2n)/G_{\mathbf{z}_0}=S^{2n-1}(\mathbb{R})$$

が成り立つ。

ι により $\mathbb{C}^n$ と $\mathbb{R}^{2n}$ を同一視する。$S^{2n-1}(\mathbb{R})\subset\mathbb{C}^2$ は S^{2n-1} と書くことにする。量子力学的ヴェクトル状態は，n 次元 Hilbert 空間である $\mathbb{C}^n$ の射線で表現される。すなわち，ある $\zeta\in\mathbb{C}^n$ が存在して，その射線は

$$[\zeta]:=\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^n:\ \exists c\in\mathbb{C},\mathbf{z}=c\zeta\}$$

である。S^{2n-1} は隠れた変数の集合とみなされる。従って，隠れた変数の状態 $\zeta\in S^{2n-1}$ は量子力学的状態の代表元とみなすことができ，多対一の関係にある。

$\xi,\eta\in S^{2n-1}$ に対して，S^{2n-1} 上の δ_ξ を Dirac デルタ測度とする。

$$\int_{S^{2n-1}(\mathbb{R})}d\delta_\xi(\mathbf{z})f(\mathbf{z})=f(\xi),\forall f\in C(S^{2n-1}).$$

$$\rho_\xi(\mathbf{z}):=|\langle\xi,\mathbf{z}\rangle|^2,\forall\mathbf{z}\in S^{2n-1}.$$

命題 3 $d\omega$ を S^{2n-1} の面積要素として，

$$Z:=\int_{S^{2n-1}}\rho_\eta(\mathbf{z})d\omega(\mathbf{z})$$

とおく。Z は，η に依存しない。

証明。 実際, $\forall \xi \in S^{2n-1}$ に対して, $\eta = g\xi$ となる $g \in U(\mathbb{C}^n)$ が存在する。 $\iota \circ g \circ \iota^{-1} \in O(\mathbb{R}^{2n})$ より, $g^* d\omega = d\omega$ であるので,

$$
\begin{aligned}
&\int_{S^{2n-1}} \rho_\eta(\mathbf{z}) d\omega(\mathbf{z}) \\
&= \int_{S^{2n-1}} |\langle \eta, \mathbf{z} \rangle|^2 d\omega(\mathbf{z}) \\
&= \int_{S^{2n-1}} |\langle g\xi, \mathbf{z} \rangle|^2 d\omega(\mathbf{z}) \\
&= \int_{S^{2n-1}} |\langle \xi, g^*\mathbf{z} \rangle|^2 d\omega(\mathbf{z}) \\
&= \int_{S^{2n-1}} |\langle \xi, \mathbf{z}' \rangle|^2 d\omega(g\mathbf{z}') \\
&= \int_{S^{2n-1}} |\langle \xi, \mathbf{z}' \rangle|^2 d\omega(\mathbf{z}') \\
&= \int_{S^{2n-1}} \rho_\xi(\mathbf{z}) d\omega(\mathbf{z}).
\end{aligned}
$$

□

命題 4

$$\int_{S^{2n-1}} d\delta_\xi(\mathbf{z}) \rho_\eta(\mathbf{z}) = |\langle \xi, \eta \rangle|^2. \tag{1}$$

証明。 明らか。 □

$[\eta]$ を準備された量子力学的状態, $[\xi]$ を測定後の状態と解釈すると, その確率が $|\langle \xi, \eta \rangle|^2$ となり, この球面 S^{2n-1} 上の隠れた変数模型が量子確率を再現していることがわかる。

3. 量子確率の出現理由についてのいくつかの解釈

式 (1) には, $[\xi]$ と $[\eta]$ のどちらを測定前の状態か測定後の状態かとすることで, 2 種類の解釈が可能である。量子確率論ではともに Hilbert 空間のヴェクトルとして表現されるこれらの量子力学的状態は, 前節の隠れた変数模型では, δ_ξ, ρ_η という異なる数学的表現をもっているからである。第 1 の解釈は, 測定前の対象の状態のアンサンブルが確率測度 $\rho_\eta \omega / Z$ で表され, 測定される状態が ξ となるというものである。第 2 の解釈は, 測定前の対象の状態のアンサンブルが確率測度 δ_ξ で表され, ρ_η の分布の隠れた変数の状態は測定により η で代表される量子状態になるというものである。

3.1. $\rho_\eta \omega / Z \to \delta_\xi$

まず, 第 1 の解釈について, 考察を進めよう。$\xi_1 = \xi, \xi_2, \ldots, \xi_n$ が $\mathbb{C}^n$ の正規完全直行系を成すとしよう。

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{S^{2n-1}} d\delta_{\xi_i}(\mathbf{z}) \rho_\eta(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n} |\langle \xi_i, \eta \rangle|^2 = 1$$

であるから, $\cup_{i=1}^n \mathrm{supp}\delta_{\xi_i} \neq S^{2n-1}$ であるが, $\cup_{i=1}^n \mathrm{supp}\delta_{\xi_i}$ は可能なすべての観測される状態を尽くしていることになる。任意の $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$ に対して, $\xi_i' = \exp(\sqrt{-1}\theta_i)\xi_i$, $i = 1, \ldots, n$, とすると, 同様にして $\cup_{i=1}^n \mathrm{supp}\delta_{\xi_i'}$ がすべての可能な観測される状態を尽くしていることになる。$\cup_{i=1}^n \mathrm{supp}\delta_{\xi_i}$ と $\cup_{i=1}^n \mathrm{supp}\delta_{\xi_i'}$ が互いの可能性を排除していると考えるのは奇妙である。むしろ, われわれがどちらの場合を観測しているのか無知であるが, それを人工的な方法で分解したために複数の排他的な結果の状態が得られると考えるべきではないか。これが可能な条件を探ってみよう。

$[\xi_i]$ として観測される隠れた変数の状態 $\xi_i^{(k)} \in [\xi] \cap S^{2n-1}$ が, $w_k^i > 0$ を重みとして $\sum_k w_k^i \delta_{\xi_i^{(k)}}$ と与えられるとしよう。$[\xi_i]$ となる相対頻度は

$$
\begin{aligned}
&\int_{S^{2n-1}} \left(\sum_k w_k^i d\delta_{\xi_i^{(k)}}(\mathbf{z}) \right) \rho_\eta(\mathbf{z}) \\
&= \sum_k w_k^i |\langle \xi_i^{(k)}, \eta \rangle|^2 \\
&= |\langle \xi_i, \eta \rangle|^2 \sum_k w_k^i
\end{aligned}
$$

となる。従って, 重みが $\sum_k w_k^i$ が i に依存しないように与えれられるかぎり $[\xi_i]$ である確率は $|\langle \xi_i, \eta \rangle|^2$ であるので, $[\xi_i]$ のどの代表元の状態が観測されたかについて我々が無知であるという解釈が成り立つことになる。

測定前に準備された状態についても, ρ_η の代わりに, $\eta^{(k)} \in [\eta] \cap S^{2n-1}$ として, 凸結合

$\sum_k w_k \rho_{\eta^{(k)}} \omega/Z$ を準備されるアンサンブルと解釈することができることを見ることは容易である。

以上の考察により, 隠れた変数の状態 ξ ではなく $[\xi_i] \cap S^{2n-1}$ が観測されているということができる。しかし, $\cup_{i=1}^n [\xi_i] \cap S^{2n-1} \neq S^{2n-1}$ で観測結果が尽くされるということに対する解釈が必要である。準備されたアンサンブル $\rho_\eta \omega/Z$ の隠れた変数の状態のうち, $\cup_{i=1}^n [\xi_i] \cap S^{2n-1}$ だけが観測結果として記録, または採用されるという解釈が自然である。その他の隠れた変数の状態は, 記録されないか, 記録されても観測結果として採用されないことになる。この模型では観測されない隠れた変数の状態は, 無限に多くなってしまう。

観測されない状態の存在を認めれば, EPR型の実験において観測される Bell の不等式 [2] の破れは, 局所的実在と矛盾しないことが示される [4, 5]。観測されない隠れた変数の状態の存在は, 測定器の測定効率や実験の幾何学的配置により認められており, Bell の不等式の破れの実験の抜け穴(loophole)として議論されてきた [6]。第 2 節の模型の今の解釈では, 観測されない隠れた変数の状態は無限に多いので, この抜け穴の議論とは本質的に異なる解釈が必要である。Accardi 等により提唱された EPR カメレオン模型の考え方は, 局所的な古典統計物理学の数学的形式に従ったものであるが, 観測されない状態は無意味であるとされる [10, 11, 12, 13]。最近の解釈として, 実験がどのような制約のもとに行われると, 観測されない状態が無意味になるのかが, 標準的な相関と隔たれた粒子の相関の違いとして分析されている [14]。

3.2. $\delta_\xi \to \rho_\eta \omega/Z$

第 2 の解釈では, $\{\eta_1 = \eta, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$ を正規完全直行系として, 測定過程において δ_ξ が $|\langle \xi, \eta_i \rangle|^2$ の割合で $\rho_{\eta_i} \omega/Z$ に属する状態に変化するというものである。この解釈ならば, 前小節の解釈と異なり, 観測されない準備された隠れた変数の状態は存在しなくなる。しかし, S^{2n-1} の元 ξ を定めたとしても, 測定結果が一意に定まらないという意味で, S^{2n-1} は本来の意味での隠れた変数ではない。$\sum_{i=1}^n \rho_{\eta_i}(\xi) = \sum_{i=1}^n |\langle \eta_i, \xi \rangle|^2 = |\langle \xi, \xi \rangle|^2 = 1$ となり, $\{\rho_{\eta_i}\}$ は単位の分割である。$[0, 1]$ を追加される隠れた変数の空間として, $S^{2n-1} \times [0, 1]$ を新たな隠れた変数の空間とし, 各 $\zeta \in S^{2n-1}$ ごとに $\rho_{\eta_i}(\zeta)$ の割合で分割すれば良いであろう。ただし, no-go 定理 [8] の含意するところから, この分割には, どの正規直行系を選ぶかに依存するという文脈性がなければならない。

$i \neq j$ であっても, 測定後のアンサンブルとしての $\rho_{\eta_i} \omega/Z$ と $\rho_{\eta_j} \omega/Z$ に同一の隠れた変数の状態 ζ が属し得ることから次が示唆される。追加された隠れた変数を λ で表すと, (ξ, λ) が $\rho_{\eta_i} \omega/Z$ に属するということから, 時間が経つと (ξ, λ) から η_i に収斂するのではないかということである。この付加的な解釈を受け入れるならば, 連続測定過程が自然に記述できる。図式的に書くならば, $\delta_\xi \to \rho_{\eta_i} \omega/Z \to \delta_{\eta_i} \to \rho_{\zeta_j} \omega/Z \to \cdots$ となるであろう。

この第 2 の解釈は, 測定ごとに新たな隠れた変数を必要とすることから, この新たな隠れた変数の導入以前には, 測定結果は定義されず無意味である。また, 準備された系はすべて観測される。これらの特徴は, Accardi のカメレオン効果 [10, 13] の考え方と調和している。更に, 連続測定の自然な記述を与える可能性があり, 第 2 の解釈は有望である。EPR 型の実験においてこの第 2 の解釈が局所性を保ち得るかは, 更に精密な分析が必要な問題であり, 将来に残された課題である。

参考文献

[1] S. Uchiyama, "On sufficient conditions of a measure-theoretic probability model of measurements describing quantum-mechanical probability", *Journal of Hokusei Jr. Col.,* 35, 193-204 (1999).

[2] J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in*

Quantum Mechanics, (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).

[3] M. Redhead, “*Incompleteness, Nonlocality, and Realism – a prolegomenon to the philosophy of quantum mechanics*”, (Clarendon Press, Oxford, 1987) [石垣寿郎訳「不完全性・非局所性・実在主義– 量子力学の哲学序説」(みすず書房, 1997)].

[4] S. Uchiyama, “Local Reality: Can It Exist in the EPR–Bohm Gedanken Experiment?”, *Found. Phys.* , 25 (1995) 1561–1575.

[5] S. Uchiyama, “On a local hidden-variable model with ‘isolato’ hypothesis of the EPR–Bohm Gedanken experiment”, in: *Proceedings of the conference: Quantum theory: reconsideration of foundations-3,* Växjö, Sweden 6–11 june (2005), Andrei Khrennikov (ed.), American Institute of Physics, AIP Conference Proceedings 810, 2–18, (Melville, New York, 2006), ISBN 0-7354-0301-5; *arXiv:* quant-ph/0507032 (2005).

[6] E. Santos, “Bell’s theorem and the experiments: Increading empirical support for local realism?”, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics,* 36 (2005), 544-565.

[7] A. M. Gleason, “Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space”, *J. Math. & Mech.* 6, 885 (1957).

[8] S. Kochen and E. P. Specker, “The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics”, *J. Math. & Mech.* 17, 59 (1967).

[9] S. P. Gudder, “On Hidden-Variable Theories”, *J. Math. Phys.* 11, 431 (1970).

[10] L. Accardi, “Einstein–Bohr: One All”, in *The interpretation of quantum theory: where do we stand?* Acta Enciclopedica, Istituto dell’Enciclopedia Italiana, 95-115 (1994); Volterra Preprint N. 174 May (1994).

[11] L. Accardi, K. Imafuku, and M. Regoli, “ON THE EPR–CHAMELEON EXPERIMENT”, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics,* 5, 1–20 (2002), arXiv: quant-ph/0112067, Volterra Preprint N. 494 December (2001) N. 494.

[12] L. Accardi, K. Imafuku, and M. Regoli, “Adaptive dynamical systems and the EPR–chameleon experiment”, in *Foundations of Probability and Physics* – 2, edited by A. Khrennikov, Mathematical Modeling in Physics, Engineering and Cognitive Science 5, (Växjö University Press, Växjö, Sweden-2002, 2003), pp. 11–36.

[13] L. Accardi, “Could we now convince Einstein?” in: *Proceedings of the conference: Quantum theory: reconsideration of foundations-3*, Växjö, Sweden 6–11 june (2005), Andrei Khrennikov (ed.), American Institute of Physics, AIP Conference Proceedings 810, 2–18, (Melville, New York, 2006), ISBN 0-7354-0301-5.

[14] L. Accardi, and S. Uchiyama, “Uniqueness of the EPR–chameleon model”, *arXiv:quant-ph 0706.1813* (2007). submitted to: IDA–QP (Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics) 14 June (2007)

［Abstract］

On a Spherical Model of Quantum Probability and its Interpretations

Satoshi UCHIYAMA

A hidden variable model which reproduces statistical properties of finite dimensional quantum probability is constructed on a higher dimensional sphere as the space of the hidden variables. In quantum probability theory, states of a system prepared before a measurement and obtained after the measurement are described by quantum-mechanical state vectors. In the present hidden-variable model, the two states are described by different mathematical objects; there are two kinds of interpretations of the hidden-variable model depending on which of the mathematical objects is taken as the prepared state. It is pointed out that one of the interpretations can provide a natural description of successive measurements.

Key Words：Quantum Probability, Hidden Variables, Kolmogorovian Probability Theory