研究ノート

量子力学的確率を持つ系

内　山　　　智

目　次

1．序

量子力学では，確率は測度論的確率論［1］とは異なる数学的形式で記述される。それは，量子確率論とか非可換確率論と呼ばれ，一般的な性質が研究されているが，ここでは，［2］に従って量子力学的確率論と呼ぶことにしよう。測度論的確率論では，確率は相対頻度解釈が可能であるだけではなく，確率的振る舞いは，我々の無知に因るとすることが可能である。なぜなら，実現されている根源事象ははじめから決定されているのであるが，われわれが，どの根源事象が実現されているのかを知らないと解釈することが可能であるからである。従って，測度論的確率論では，根源事象を隠れた変数と考えることが常に可能である。しかし，量子力学的確率論では，隠れた変数の導入は一般に不可能だとされている。より正確には，文脈非依存的隠れた変数（noncontextual hidden-variable）の導入が，3次元以上の量子力学的確率論では，不可能なことが証明されている［3，4］。

しかし，文脈依存的隠れた変数の導入は形式的には常に可能である。量子力学的確率論では，文脈ごとには，確率の相対頻度解釈が可能なので，測度論的確率空間を構成できる。それらの直積として得られる測度論的確率空間を考えれば良いからである［4］。従って，量子力学的確率空間とは，多数の測度論的確率空間の集まりと解釈することが可能である［2］。物理学的には，更に一歩進んで，なぜ，同一の物理的対象に多数の測度論的確率空間が付随することになるのかという疑問が沸く。測定行為による対象の状態への擾乱が原因であるというのが，一般的見解であるが，その擾乱がどのようなものかというと，意見が分かれてくる。EPR-Bohm 思考実験［5］で議論されるような気味の悪い遠隔作用をするものなのか，Bohm の隠れた変数理論の量子ポテンシャルのような，やはり非局所的なものであるのか，あるいは，測定完了の時間のバラつきが原因なのか［6］，そもそも対象が何らかの意味で不安定となって，測定に引っかからないようになっているのではないかなど［7］，さまざまな解釈の可能性が残っている。

本稿では，量子力学的確率論のように同一の物理的対象に多数の測度論的確率空間が結びつくのは，どのような性質をもった物理的対象であるのかという，ひとつのその描像を提示する。

本論文の構成は，以下のようである。第2節では，Peres による文脈非依存的隠れた変数の導入が量子力学的確率論に不可能である

キーワード：隠れた変数の理論，文脈依存性，量子確率

ことの証明について［８］，文脈依存性を考慮して再検討する。第３節では，量子力学的確率論に従う物理的対象の満たすべき条件として，どのような要請があれば十分かを提示する。

２．Peres の反例

量子力学的状態$|\Psi\rangle$において，その量子理学的確率空間が単一の測度論的確率空間によって記述できたと仮定した場合，hidden variable（根源事象 ω）を固定した場合に，オブザーバブル O の値（O の固有値のどれか）を対応させる写像を $v(O)$と書くことにする。文脈性をはっきりさせるために，$v(O)$に，$v(O)_{\underline{\alpha}}$ とか $v(O)_{\underline{\alpha}\to\underline{\beta}}$ のように，必要に応じて，文脈や文脈の歴史を添え字とする。

同一の文脈に属する物理量の間には，関数関係を保存するという次の原理を要請することにする［９］。

<u>Functional Composition Principle</u>（FUNC）
If $A=g(O_1,O_2)=h(O_3,O_4)$, *then* $v(A)=g(v(O_1),v(O_2))=h(v(O_3),v(O_4))$.
ただし，$[O_1,O_2]=[O_3,O_4]=0$。

オブザーバブルとして，Pauli 行列によってあらわされるものを考察することにする。Pauli 行列の定義とそれらの性質は，以下のようである：

$$\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ \sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{-1}\\ \sqrt{-1} & 0\end{pmatrix},$$

$$\sigma_x\sigma_y=\sqrt{-1}\sigma_z,\ \sigma_y\sigma_z=\sqrt{-1}\sigma_x,$$
$$\sigma_z\sigma_x=\sqrt{-1}\sigma_y,$$
$$\sigma_x{}^2=\sigma_y{}^2=\sigma_z{}^2=1,$$
$$[\sigma_x,\ \sigma_y]=2\sqrt{-1}\sigma_z,\ [\sigma_y,\ \sigma_z]=2\sqrt{-1}\sigma_x,$$
$$[\sigma_z,\ \sigma_x]=2\sqrt{-1}\sigma_y.$$

$|\Psi\rangle$を二つのスピンの和のシングレット状態とする。以下の６つの演算子を考えよう。

$$\begin{matrix} I\otimes\sigma_x & \sigma_x\otimes I\\ \sigma_y\otimes I & I\otimes\sigma_y\\ \sigma_x\otimes\sigma_y & \sigma_y\otimes\sigma_x \end{matrix} \tag{1}$$

$|\Psi\rangle$ がシングレット状態なので，

$$v(\sigma_x\otimes I)=-v(I\otimes\sigma_x), \tag{2}$$
$$v(\sigma_y\otimes I)=-v(I\otimes\sigma_y), \tag{3}$$
$$v(\sigma_z\otimes I)=-v(I\otimes\sigma_z). \tag{4}$$

$[\sigma_x\otimes I,\ I\otimes\sigma_y]=0$ なので，FUNC より，

$$\begin{aligned}v(\sigma_x\otimes\sigma_y)&=v((\sigma_x\otimes I)(I\otimes\sigma_y))\\ &=v(\sigma_x\otimes I)v(I\otimes\sigma_y).\end{aligned} \tag{5}$$

同様にして，

$$\begin{aligned}v(\sigma_y\otimes\sigma_x)&=v((\sigma_y\otimes I)(I\otimes\sigma_x))\\ &=v(\sigma_y\otimes I)v(I\otimes\sigma_x).\end{aligned} \tag{6}$$

ところで，

$$\begin{aligned}&[\sigma_x\otimes\sigma_y,\ \sigma_y\otimes\sigma_x]\\ &=\sigma_x\otimes\sigma_y\sigma_y\otimes\sigma_x-\sigma_y\otimes\sigma_x\sigma_x\otimes\sigma_y\\ &=\sigma_x\sigma_y\otimes\sigma_y\sigma_x-\sigma_y\sigma_x\otimes\sigma_x\sigma_y\\ &=i\sigma_z\otimes(-i\sigma_z)-(-i\sigma_z)\otimes i\sigma_z=0.\end{aligned}$$

従って，FUNC より，$\underline{\alpha}:=\{\sigma_x\otimes\sigma_y,\ \sigma_y\otimes\sigma_x\}$ の文脈において

$$v((\sigma_x\otimes\sigma_y)(\sigma_y\otimes\sigma_x))_{\underline{\alpha}}=v(\sigma_x\otimes\sigma_y)_{\underline{\alpha}}v(\sigma_y\otimes\sigma_x)_{\underline{\alpha}}. \tag{7}$$

$\underline{\alpha}:=\{\sigma_x\otimes\sigma_y,\ \sigma_y\otimes\sigma_x\}$ の文脈と両立しない $\underline{\beta}:=\{\sigma_x\otimes I,\ I\otimes\sigma_y\}$ の文脈において，

$$\begin{aligned}&v(\sigma_x\otimes\sigma_y)_{\underline{\alpha}\to\underline{\beta}}v(\sigma_y\otimes\sigma_x)_{\underline{\alpha}}\\ &=v(\sigma_x\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\beta}}v(I\otimes\sigma_y)_{\underline{\alpha}\to\underline{\beta}}v(\sigma_y\otimes\sigma_x)_{\underline{\alpha}}\\ &=v(\sigma_x\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\beta}}v(I\otimes\sigma_y)_{\underline{\alpha}\to\underline{\beta}\to\underline{\delta}}v(\sigma_y\otimes\sigma_x)_{\underline{\alpha}}\\ &=v(\sigma_x\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\beta}}(-v(\sigma_y\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\beta}\to\underline{\delta}})v(\sigma_y\otimes\sigma_x)_{\underline{\alpha}}\\ &=-v(\sigma_x\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\beta}}v(\sigma_y\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\beta}\to\underline{\delta}}v(\sigma_y\otimes\sigma_x)_{\underline{\alpha}}.\end{aligned}$$

ここで，$\underline{\delta}:=\{\sigma_y\otimes I,\ I\otimes\sigma_y\}$ の文脈とした。$\underline{\beta}=\{\sigma_x\otimes I,\ I\otimes\sigma_y\}$ の文脈とは両立しない $\underline{\gamma}:=\{\sigma_y\otimes I,\ I\otimes\sigma_x\}$ の文脈において，

$$\begin{aligned}&v(\sigma_y\otimes\sigma_x)_{\underline{\alpha}\to\underline{\gamma}}\\ &=v(\sigma_y\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\gamma}}v(I\otimes\sigma_x)_{\underline{\alpha}\to\underline{\gamma}}\\ &=v(\sigma_y\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\gamma}}(-v(\sigma_x\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\gamma}\to\underline{\varepsilon}})\\ &=-v(\sigma_x\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\gamma}\to\underline{\varepsilon}}v(\sigma_y\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\gamma}}.\end{aligned}$$

ここで，$\underline{\varepsilon}:=\{\sigma_x\otimes I,\ I\otimes\sigma_x\}$ の文脈とした。結局，これらの両立しない文脈で得られた式を使うと，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{v}((\sigma_x\otimes\sigma_y)(\sigma_y\otimes\sigma_x))_{\underline{\alpha}}\\&=\boldsymbol{v}(\sigma_x\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\beta}}\boldsymbol{v}(\sigma_x\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\gamma}\to\underline{\varepsilon}}\\&\times\boldsymbol{v}(\sigma_y\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\beta}\to\underline{\delta}}\boldsymbol{v}(\sigma_y\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\gamma}}\\&=\boldsymbol{v}(\sigma_x\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\beta}\to\underline{\varepsilon}}\boldsymbol{v}(\sigma_x\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\gamma}\to\underline{\varepsilon}}\\&\times\boldsymbol{v}(\sigma_y\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\beta}\to\underline{\delta}}\boldsymbol{v}(\sigma_y\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\gamma}\to\underline{\delta}}.\end{aligned}\tag{8}$$

文脈を無視すると，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{v}((\sigma_x\otimes\sigma_y)(\sigma_y\otimes\sigma_x))_{\underline{\alpha}}\\&=\boldsymbol{v}(\sigma_x\otimes I)^2\boldsymbol{v}(\sigma_y\otimes I)^2=1.\end{aligned}$$

一方，$\underline{\xi}:=\{\sigma_z\otimes I, I\otimes\sigma_z\}$ の文脈において，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{v}((\sigma_x\otimes\sigma_y)(\sigma_y\otimes\sigma_x))_{\underline{\xi}}\\&=\boldsymbol{v}(\sigma_x\sigma_y\otimes\sigma_y\sigma_x)_{\underline{\xi}}\\&=\boldsymbol{v}(i\sigma_z\otimes(-i\sigma_z))_{\underline{\xi}}\\&=\boldsymbol{v}(\sigma_z\otimes I)_{\underline{\xi}}\boldsymbol{v}(I\otimes\sigma_z)_{\underline{\xi}}\\&=\boldsymbol{v}(\sigma_z\otimes I)_{\underline{\xi}}(-\boldsymbol{v}(\sigma_z\otimes I)_{\underline{\xi}})\\&=-\boldsymbol{v}(\sigma_z\otimes I)^2_{\underline{\xi}}=-1.\end{aligned}$$

このように文脈を考慮しないと矛盾が生ずるので，$\boldsymbol{v}(\cdot)$は存在しないと主張される［8］。

(8)式では，$\underline{\beta}=\{\sigma_x\otimes I, I\otimes\sigma_y\}$ の文脈においては，$\boldsymbol{v}(I\otimes\sigma_y)_{\underline{\alpha}\to\underline{\beta}}$ は安定した値として固有値としてよい。ところが，$\underline{\delta}=\{\sigma_y\otimes I, I\otimes\sigma_y\}$ の文脈において $\boldsymbol{v}(I\otimes\sigma_y)_{\underline{\alpha}\to\underline{\beta}\to\underline{\delta}}$ は安定であり，局所性を考えれば，等しい値である。しかし，$\boldsymbol{v}(I\otimes\sigma_y)_{\underline{\alpha}\to\underline{\beta}\to\underline{\delta}}$ は存在しても，$\boldsymbol{v}(\sigma_y\otimes I)_{\underline{\alpha}\to\underline{\beta}\to\underline{\delta}}$ は，$\underline{\beta}\to\underline{\delta}$ において不安定となって，存在しないか，異なる値になるということが起きる可能性があり，それによって，Peres の議論が成立しなくなる。

3．量子力学的確率を持つ系

この節では，想像力をフルに発揮して，量子力学的確率論を導く物理的対象が持つべき性質を提示する。まず，［6］のように，文脈性を，力学的変化の安定集合として解釈することを基本としよう。

Γ を，$(q^1,\ldots,q^n,p_1,\ldots,p_n)$座標系として，symplectic form $\sum_{i=1}^n dp_i\wedge dq^i$ を持つ symplctic 多様体とする。Γ は，n 個の自由度を持つ古典力学系の相空間とみなせるものである。これらとは別の自由度が存在し，それらの影響によって，Γ に様々な力学的変化が生じ得るものとしよう。それらを，$\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\gamma},\ldots$ などと記すことにしよう。また，これらの全体の集合を C で表すことにする。$\underline{\alpha}\in C$ での運動は，時間 t だけ経過した後の状態を対応させる写像を $\sigma_t^{\underline{\alpha}}:\Gamma\to\Gamma$ として表現される。力学的変化ということから，$t\in\mathrm{R}$ に関して，$\{\sigma_t^{\underline{\alpha}}\}$ は，

$$\sigma_t^{\underline{\alpha}}\circ\sigma_s^{\underline{\alpha}}=\sigma_{t+s}^{\underline{\alpha}}\tag{9}$$

を満たし，$\sigma_0^{\underline{\alpha}}=\iota_\Gamma$ である。ここで，ι_Γ は，Γ の恒等写像である。$\sigma_t^{\underline{\alpha}}$ は単射とは限らない。

Γ の体積密度は，$\omega^{2n}:=dp_1\wedge\ldots\wedge dp_n\wedge dq^1\wedge\ldots\wedge dq^n$ で与えられる。X を Γ の可測部分集合とする。その体積を$|X|$と書くことにする。つまり，

$$|X|:=\int_X\omega^{2n}.\tag{10}$$

$$V_t^{\underline{\alpha}}(X):=|X|/|\sigma_t^{\underline{\alpha}}(X)|\tag{11}$$

と定義しよう。$V_t^{\underline{\alpha}}(X)=1$ が任意の零ではない可測集合 $X\subset\Gamma$ について成立すれば，$\sigma_t^{\underline{\alpha}}$ は体積保存写像である。以下では簡単のため，考察の対象となる部分集合については，体積を保存するものと仮定することにする。

$\underline{\beta}, \underline{\gamma},\ldots\in C$ などについても同様とする。

$\sigma_t^{\underline{\alpha}}$ についての要請は以下のようである。

要請 1．N 個の部分集合 $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ が存在し，かつ Γ の分割 $\alpha^1,\ldots,\alpha^N$ で，$\alpha_i\subset\alpha^i$, $i=1,\ldots,N$, となるもので，$\sigma_t^{\underline{\alpha}}$ によって α^i は α_i に ‘収束’ する。つまり，

$$\Gamma=\bigcup_{i=1}^N\alpha^i,\tag{12}$$

$$\alpha_i=\bigcap_{T>0}\bigcup_{t>T}\sigma_t^{\underline{\alpha}}(\alpha^i).\tag{13}$$

注意．$\sigma_t^{\underline{\alpha}}$ は，状態を α_i's に安定化する運動である。

要請 2．各 $\underline{\alpha}\in C$ に対して，Γ の正準座標 $(q'^1,\ldots,q'^n,p'_1,\ldots,'p_n)$で，$I=q'^1$，$\theta=p'_1$ が作

用・角変数(I, θ)となるものが存在する。更に，α_iの座標として，$r_i := I - a_i$とすると，α_l内では$0 \leq r_i < e_i$となる$e_i > 0$が存在する。$\sigma_t^{\underline{\alpha}}$は，$\alpha_i$上で，$\theta$に関して周期$T_{\alpha i}$を持つ，すなわち，

$$\theta(\sigma_{t+T\alpha_i}^{\underline{\alpha}}(\xi)) = \theta(\xi), \qquad \xi \in \alpha_i. \tag{14}$$

$$\alpha_i(\theta_0) := \{\xi \in \alpha_i \mid \theta(\xi) = \theta_0\} \tag{15}$$

とすれば，$\xi \in \alpha^i$は，あるθ_0が存在して，

$$\bigcap_{N>0} \bigcup_{n>N} \sigma_{nT\alpha_i}^{\underline{\alpha}}(\xi) \in \alpha_i(\theta_0) \tag{16}$$

となる。

簡単のために，次の記法を導入する。$X \subset \alpha^i$に対して，

$$\sigma_{\infty \cdot T\alpha_i}^{\underline{\alpha}}(X) := \bigcap_{N>0} \bigcup_{n>N} \sigma_{nT\alpha_i}^{\underline{\alpha}}(X). \tag{17}$$

注意．

$$\bigcap_{N>0} \bigcup_{n>N} \sigma_{nT\alpha_i}^{\underline{\alpha}} \circ \sigma_{\varepsilon T\alpha_l}^{\underline{\alpha}}(\xi)$$

$$= \bigcap_{N>0} \bigcup_{n>N} \sigma_{nT\alpha_i + \varepsilon T\alpha_l}^{\underline{\alpha}}(\xi)$$

$$\subset \bigcap_{N>0} \sigma_{\varepsilon T\alpha_l}^{\underline{\alpha}}\Big(\big(\bigcup_{n>N} \sigma_{nT\alpha_i}^{\underline{\alpha}}(\xi) \Big)$$

$$\subset \sigma_{\varepsilon T\alpha_l}^{\underline{\alpha}}\Big(\bigcap_{N>0} \bigcup_{n>N} \sigma_{nT\alpha_i}^{\underline{\alpha}}(\xi) \Big) \in \alpha_i(\theta_0 + 2\pi\varepsilon),$$

$\cup_{n>N} \sigma_{nT\alpha_i}^{\underline{\alpha}}(\xi) \supset \cup_{n>N+1} \sigma_{nT\alpha_i}^{\underline{\alpha}}(\xi) \supset \cdots$であるからである。

要請3．測定は，測定の前後で，状態が同一のα_lに安定して留まっている場合にのみ可能であり，α_lという測定結果が得られる。そうでない場合は，不安定な値として，測定結果として記録されない。

要請4．測定に際して，対象は擾乱を受けて，状態を可能な範囲内でランダムに変化させる。$\alpha_l(\theta_0)$内にN個可能な状態が用意されている場合，$\xi \in \alpha_l(\theta_0)$は$\alpha_l(\theta_0)$の用意された別の状態にランダムに変化するので，$N^2$個の$\alpha_l$という測定結果が得られる。

注意．N個の用意された対象から，N^2個の対象が得られるというのではない。N個の可能な状態の対象のうち，測定後にもやはりN個の状態のどれかであるという意味で安定な対象だけを取るということである。例えば，a_1という値を持つ状態が$x_1, \ldots, x_{N_1}$のN_1個可能であるとし，a_2という値を持つ状態が$y_1, \ldots, y_{N_2}$のN_2個可能であるとし，それ以外にはない場合を考えよう。測定によって，対象の状態は変化するので，何度も測定を繰り返すと，a_1は$(x_1 \to x_1), (x_1 \to x_2), \ldots, (x_i \to x_j), \ldots, (x_{N_1} \to x_{N_1})$の$N_1^2$の場合が生じ得て，同様に$a_2$は$N_2^2$の場合が生じうる。したがって，平均値は，$(a_1 N_1^2 + a_2 N_2^2)/(N_1^2 + N_2^2)$であって，$(a_1 N_1 + a_2 N_2)/(N_1 + N_2)$とは一般に異なる。

Cの中で，$\underline{\alpha}$を特別なものとして，他の$\underline{\beta}$, $\underline{\gamma} \in C$とは区別して，以下のような要請を付け加えることにする。

要請5．$\underline{\alpha}$以外の任意の$\underline{\beta} \in C$に，

$$\pi^{\underline{\alpha}} \circ \sigma_{\infty \cdot T\alpha_l}^{\underline{\alpha}}(\beta_i(\theta_0) \cap \alpha^l) = \beta_i(\theta_0) \cap \alpha^l \tag{18}$$

を満たす（引き戻し）写像$\pi^{\underline{\alpha}} : \cup_{l=1}^{N} \alpha_l \to \Gamma$が存在する。

要請6．任意の$\delta \in \mathrm{R}$に対して，

$$|\beta_i(\theta_1) \cap \alpha^l| = |\sigma_\delta^{\underline{\beta}}(\beta_i(\theta_1) \cap \alpha^l)|$$
$$= |\beta_i(\theta_1 + \delta) \cap \alpha^l|, \ \alpha^l \in \underline{\alpha}. \tag{19}$$

各α_lにおいては，$\sigma_t^{\underline{\alpha}}$以外に，自発的なランダムな変化が生じうるものとする。これは，$\cup_{l=1}^{N} \alpha_l$内での遷移を引き起こすものとしよう。$\sigma_\infty^{\underline{\alpha}}(\beta_i(\theta_1))$'s, $\sigma_\infty^{\underline{\alpha}}(\gamma_i(\theta_2))$'s$\subset \cup_{l=1}^{N} \alpha_l$であり，次の要請の条件を満たすこのランダムな遷移をあらわす$\cup_{l=1}^{N} \alpha_l$から$\cup_{l=1}^{N} \alpha_l$への遷移の写像を$\tau_{\underline{\beta} \to \underline{\gamma}}^{\underline{\alpha}}$と表すことにする。

要請7．$\tau_{\underline{\beta} \to \underline{\gamma}}^{\underline{\alpha}}$は次のプロセスの総体をあらわすランダムな写像である。$\underline{\beta}$に属する$\beta_i(\theta_1)$，$\underline{\gamma}$に属する$\gamma_j(\theta_2)$に対して，

(i) $\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l}(\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l)$から，$\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l+\varepsilon T\alpha l}(\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l)$へランダムに遷移する。

(ii) この遷移のあと，$\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l+\varepsilon T\alpha l}(\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l)$へ遷移したプロセスのうち，$|\cos(\theta(\sigma^{\alpha}_{\infty}(\beta_i(\theta_1)))-\theta(\sigma^{\alpha}_{\infty}(\theta_2)))-2\pi\varepsilon)|$の割合で対象の状態は$\alpha_l$の外に飛び出すものとする。$\cos(\theta(\sigma^{\alpha}_{\infty}(\beta_i(\theta_1)))-\theta(\sigma^{\alpha}_{\infty}(\gamma_i(\theta_2)))-2\pi\varepsilon)>0(<0)$である状態は，正（負）の**不安定荷**（unstability charge）を持つということにする。

(iii) 状態がα_lの外に飛び出した対象は，反対の符号の不安定荷を持つ状態を生み出した$\alpha_{l'}$の中に吸収される。

(iv) α_lの外に飛び出さなかった状態や，他の$\alpha_{l'}$から飛び出したα_lに吸収された状態の一部または全ては，最初のランダムな遷移を逆に辿って，$\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l}(\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l)$に戻る。$\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l}(\beta_i\cap\alpha^l)$に戻らないものは，$\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l+\varepsilon T\alpha l}(\gamma_i(\theta_2)\cap\alpha^l)$に留まる。

要請7より，結果として$\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l}(\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l)$の可能な状態の減少量，すなわち$\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l+\varepsilon T\alpha l}(\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l)$の増加量を求めよう。$I_1(i,j)$と$I_2(i,j)$を$\{1,2,...,N\}$の分割で，$l\in I_1(i,j)$は，$\alpha_l$から正の不安定荷をもつ状態が飛び出し，$l\in I_2(i,j)$は，$\alpha_l$から負の不安定荷をもつ状態が飛び出すものとし，$l\in I_3(i,j)$は，$\alpha_l$から何も飛びださないものとする。

$\cup_{l=1}^{N}\alpha_l$から正の不安定荷を持って飛び出す数は，

$$\sum_{l\in I1}|\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l}(\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l)|$$
$$\times\ |\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l+\varepsilon T\alpha l}\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l|$$
$$\times\cos(\theta(\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l+\varepsilon T\alpha l}(\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l))$$
$$-\ \theta(\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l}(\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l)))$$

である。$\cup_{l=1}^{N}\alpha_l$から負の不安定荷を持って飛び出す数は，

$$-\sum_{l\in I2}|\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l}(\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l)|$$
$$\times\ |\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l+\varepsilon T\alpha l}\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l|$$
$$\times\cos(\theta(\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l+\varepsilon T\alpha l}(\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l))$$
$$-\ \theta(\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l}(\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l)))$$

である。反対の符号の不安定荷の空きに吸収されるので，$\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l+\varepsilon T\alpha l}(\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l)$の増加量は，

$$\Big|\sum_{l=1}^{N}|\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l}(\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l)|$$
$$\times\ |\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l+\varepsilon T\alpha l}\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l|$$
$$\times\cos(\theta(\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l+\varepsilon T\alpha l}(\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l))$$
$$-\ \theta(\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l}(\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l)))\Big|$$

である。

要請8．測定前のアンサンブルは，角変数が$\pi/2$だけずれたものを必ず伴う。例えば，$\beta_i(\theta_1)$と$\beta_i(\theta_1+\pi/2)$に一様に分布する状態として与えられる。測定に際しては，この二組のアンサンブルの間をまたがる，可能な状態へのランダムな変化はない。

要請8より，θ_1を$\theta_1+\pi/2$に置き換えたものからの寄与があり，それは

$$\Big|\sum_{l=1}^{N}|\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l}(\beta_i(\theta_1+\pi/2)\cap\alpha^l)|$$
$$\times\ |\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l+\varepsilon T\alpha l}(\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l)|$$
$$\times\ \sin(\theta(\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l+\varepsilon T\alpha l}(\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l))$$
$$-\ \theta(\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l}(\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l)))\Big|$$

である。

更に，$\gamma_j(\theta_2+\pi/2)$への遷移を考慮することが必要になる。これは，

$$\Big|-\sum_{l=1}^{N}|\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l}(\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l)|$$
$$\times\ |\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l+\varepsilon T\alpha l}(\gamma_j(\theta_2+\pi/2)\cap\alpha^l)|$$
$$\times\ \sin(\theta(\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l+\varepsilon T\alpha l}(\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l))$$
$$-\ \theta(\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha l}(\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l)))\Big|$$

である。

$\beta_i(\theta_1+\pi/2)$から$\gamma_j(\theta_2+\pi/2)$への寄与は，

$$\Bigl|\sum_{l=1}^{N}|\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha_l}(\beta_i(\theta_1+\pi/2)\cap\alpha^l)|$$
$$\times\ |\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha_{l+}\varepsilon' T\alpha_l}(\gamma_j(\theta_2+\pi/2)\cap\alpha^l)|$$
$$\times\ \cos\bigl(\theta(\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha_{l+}\varepsilon' T\alpha_l}(\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l))$$
$$-\ \theta(\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha_l}(\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l))\bigr)\Bigr|$$

となる。

従って，γ_j として測定される数は，要請 4，6 を使うと，

$$2\ \Bigl|\sum_{l=1}^{N}|\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha_l}(\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l)|$$
$$\times\ |\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha_{l+}\varepsilon T\alpha_l}(\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l)|$$
$$\times\ \sin\bigl(\theta(\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha_{l+}\varepsilon T\alpha_l}(\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l))$$
$$-\ \theta(\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha_l}(\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l))\bigr)\Bigr|^2$$
$$+2\Bigl|\sum_{l=1}^{N}|\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha_l}(\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l)|$$
$$\times\ |\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha_{l+}\varepsilon' T\alpha_l}(\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l)|$$
$$\times\ \cos\bigl(\theta(\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha_{l+}\varepsilon' T\alpha_l}(\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l))$$
$$-\ \theta(\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha_l}(\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l))\bigr)\Bigr|^2$$

となる。

$$\langle\alpha_l|\beta_i\rangle:=|\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l|\exp[\sqrt{-1}\theta(\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha_l}(\beta_i(\theta_1)\cap\alpha^l))], \tag{20}$$
$$\langle\alpha_l|\gamma_j\rangle:=|\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l|\exp[\sqrt{-1}\theta(\sigma^{\alpha}_{\infty\cdot T\alpha_l}(\gamma_j(\theta_2)\cap\alpha^l))] \tag{21}$$

と置いて，Dirac の記法を使えば，

$$2\Bigl|\sum_{l=1}^{N}\langle\gamma_j|\alpha_l\rangle\langle\alpha_l|\beta_i\rangle\Bigr|=2|\langle\gamma_j|\beta_i\rangle|^2 \tag{22}$$

が，$\beta_i(\theta_1)$から，$\gamma_j(\theta_2)$への遷移の割合を表す。

$\gamma_j\in\underline{\gamma}$ は，ランダムに選ばれるとして，この遷移を，

$$\sigma_{\underline{\beta}\to\underline{\gamma}}:=\pi^{\alpha}\circ\tau^{\alpha}_{\underline{\beta}\to\underline{\gamma}}\circ\sigma^{\alpha}_{\infty} \tag{23}$$

のようにあらわそう。

要請 9． $\sigma_{\underline{\beta}\to\underline{\gamma}}$ を 1 回適用しただけでは，$\beta_i(\theta_1)$に戻る場合があるので，繰り返し $\sigma_{\underline{\beta}\to\underline{\gamma}}$ が適用されて，最終的にすべて，$\gamma_j\in\underline{\gamma}$ のどれかに遷移するとする。

結局，これらの遷移は，$2|\langle\gamma_1|\beta_i\rangle|^2,\ldots,2|\langle\gamma_N|\beta_i\rangle|^2$ の割合で遷移するので，γ_j に遷移する確率は，

$$\frac{|\langle\gamma_j|\beta_i\rangle|^2}{\sum_{l=1}^{N}|\langle\gamma_l|\beta_i\rangle|^2}. \tag{24}$$

注意． $|\beta_i\rangle$と$|\gamma_j\rangle$が直行するというのは，正の不安定荷をもった状態の数と負の不安定荷をもつ状態の数がつりあっているときで，β_i から γ_j への遷移は起こらない。

σ^{γ}_{∞} とは異なり，$\sigma_{\underline{\beta}\to\underline{\gamma}}$ は，$\tau^{\alpha}_{\underline{\beta}\to\underline{\gamma}}$ のランダム性により，$\xi\in\beta_i(\theta_1)$がどの γ_j に遷移するかは，Γ の状態だけでは決まっていない。$\sigma_{\underline{\beta}\to\underline{\gamma}}$ は，その定義から一般にヒステリシスを持つ。文脈依存性は，ヒステリシスとしての結果として現れている。この解釈は［10］とも類似しているが，今回提示した系が局所性を維持することが可能か否かは今のところ不明である。要請 9 を緩めて，不安定のまま測定にかからないような状態を想定する必要があるかもしれない［ 7 ］。今後の課題である。

［参考文献］

［ 1 ］ A. Papoulis, “*Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*”, (McGraw-Hill, Inc., 1965).

［ 2 ］ S. Uchiyama, “On sufficient conditions of a measure-theoretic probability model of measurements describing quantum-mechanical probability”, *Journal of Hokusei Jr. Col.*, 35, 193–204 (1999). 5).

［ 3 ］ A. M. Gleason, “Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space”, *J. Math. & Mech.* 6, 885 (1957).

［ 4 ］ S. Kochen and E. P. Specker, “The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics”, *J. Math. & Mech.* 17, 59 (1967).

［ 5 ］ F. Selleri, “*Die Debatte um die Quantentheorie*” (Vieweg, Braunschweig, 1983)［櫻山義夫訳「量子力学論争」(共立出版，1986)］。

［ 6 ］ S. Uchiyama, *Found. Phys.*, 25, 1561–75 (1995).

［ 7 ］ S. Uchiyama, “On a local hidden-variable model with ‘isolato’ hypothesis of the EPR--

Bohm Gedanken experiment", *arXiv:* quant-ph/0507032 (2005).
[8] A. Peres, *Phys. Lett. A* **151**, 107 (1990).
[9] A. A. Grib and W. A. Rodrigues, Jr., "*Nonlocality in Quantum Physics*", (Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 1999).
[10] 内山　智,「Bellの不等式を破る局所的な隠れた変数模型」, 北星学園大学短期大学部北星論集, **3**, 37-49 (2005)。