北星学園大学短期大学部北星論集第20号（通巻第58号）（2023年３月）・抜刷

【研究ノート】

EPR-Bohm 思考実験における局所的実在の可能性

内　山　　　智

研究ノート

EPR-Bohm 思考実験における局所的実在の可能性

内 山 智

Satoshi UCHIYAMA

目次

［Abstract］

Local Reality Can Exist in the EPR-Bohm Gedanken Experiment

Considerations based on the mechanistic quantum theory show that the local reality can exist even if Bell's inequality is violated in the EPR-Bohm Gedanken experiment. Quantum mechanical states are interpreted as periodic trajectories in phase space. In the measurement, periodic trajectories are assumed to undergo a recoverable deformation. Moreover, the statistical results of the measurement can be the same even if they undergo different deformations. It is possible that periodic trajectories undergoing different deformations are not in the same state; however, their state changes spontaneously. If it changes spontaneously, we show that it can be said that local reality exists even if it does not have the locality assumed in the derivation of Bell's inequality.

1．はじめに

本稿では，Bell の不等式［1，2，3，4，5］の破れが，局所的実在の存在を排除しない可能性があることを示す。その可能性は，機械論的量子論［6］に基づいた考察によって発見された。まず，機械論的量子論に基づいた拙稿［7］の分析をもとに，量子力学的な対象の測定過程を定式化する。その分析結果を，EPR-Bohm 思考実験の場合に適用し，動的な局所的実在の存在の可能性を示す。

2．機械論的量子力学における測定過程

拙稿［7］のように，物理的な対象である系Σの位相空間をシンプレクティック多様体Qとする。量子力学的状態には，Q内の周期的軌道が対応すると考える。周期的軌道$\alpha:[0,T_\alpha]\to Q$のパラメータをsとする。周期的なので，$\alpha(T_\alpha)=\alpha(0)$であるとする。パラメーター$s$の狭義単調増加関数$\phi_\alpha$による$\alpha$のU(1)-リフト$\alpha^\star$は次によって定義される［6，7］：

$$\alpha^\star(s) := \Big(\alpha(s), \mathrm{e}^{i\phi_\alpha(s)}\Big), \quad s\in[0,T_\alpha]. \quad (1)$$

周期的軌道と言っても，αは，ある$s\in[0,T_\alpha]$において交わったり，或いは多重に周回していても良い。ϕ_αをU(1)-リフト$\alpha^\star$の位相関数と呼ぼう。

［6］では，位相関数ϕ_αはα内のいくつかの状態のみが用意されるという状況を表現するために導入されたもので，$\mathrm{e}^{i\phi_\alpha(s)}=1$となる$s$のときの状態$\alpha(s)$が用意されているということを表現しているとした。つまり，

キーワード：量子力学的確率，隠れた変数，周期的軌道，局所的実在
Key words：quantum-mechanical probability; hidden variables; periodic trajectories; local reality

$$\left\{\alpha(s)\in Q \mid \mathrm{e}^{i\phi_\alpha(s)}=1,\ s\in[0,T_\alpha]\right\}$$
$$=\left\{\alpha(\phi_\alpha^{-1}(2\pi k))\in Q \mid k=0,1,2,\cdots,L\right\}$$

という状態の集合を表すとしていた。ここで，$L=(\phi_\alpha(T_\alpha)-\phi_\alpha(0))/(2\pi)$である。

物理量$B:Q\to\mathbb{R}$の測定の文脈$\underline{\beta}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$において［6，7］，$\alpha$から$\beta_j$に分岐するとき，$\alpha(s_\alpha^{\beta_j})$で$\alpha$から離れ，$\beta_j(f_\alpha^{\beta_j})$で$\beta_j$に到達するとしよう。このようにして，$\alpha^\star\to\beta_j^\star$という運動の遷移が起こる。この遷移における位相のずれは，$\phi_{\beta_j}(f_\alpha^{\beta_j})-\phi_\alpha(s_\alpha^{\beta_j})$である。この位相のずれを

$$\theta_\alpha^{\beta_j}:=\phi_{\beta_j}(f_\alpha^{\beta_j})-\phi_\alpha(s_\alpha^{\beta_j}) \tag{2}$$

で表そう。

$$s_\alpha^{\beta_j} = f_{\beta_j}^\alpha, \tag{3}$$

$$f_\alpha^{\beta_j} = s_{\beta_j}^\alpha \tag{4}$$

を仮定しよう［6，7］。すると(2)より，

$$\theta_{\beta_j}^\alpha=-\theta_\alpha^{\beta_j} \tag{5}$$

となる。

任意の$\theta\in\mathbb{R}$に対して

$$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star(s):=\left(\alpha(s),\mathrm{e}^{i(\phi_\alpha(s)-\theta)}\right),s\in[0,T_\alpha]. \tag{6}$$

と定義する。ϕ'_αをこれの位相関数とすると，

$$\phi'_\alpha(s)=\phi_\alpha(s)-\theta=2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$$

より，$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$は，$\{\alpha(\phi_\alpha^{-1}(2\pi k+\theta))\mid k\in\mathbb{Z}\}$という状態の集合を表わしている。位相関数は狭義単調増加関数なので，aを正の実数として，$s':=(\phi_\alpha(s)-\phi_\alpha(0))/a$とすると，$\phi_\alpha(s)=as'+\phi_\alpha(0)$のようにパラメータ$s'$の線形関数になる。パラメータがこのようなものであるとすると，一般性を失うことなく，位相関数は$\phi_\alpha(s)=as+\phi_\alpha(0)$という形の線形関数として良い。すると，$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$は，$\{\alpha(2\pi k/a+(\theta-\phi_\alpha(0))/a)\mid k\in\mathbb{Z}\}$を表わす。

従って，$\mathrm{e}^{-i\phi_\alpha(s_\alpha^{\beta_j})}\alpha^\star$が表す状態には，$\alpha(s_\alpha^{\beta_j})$が含まれる。$\underline{\beta}$における測定の影響により$\alpha(s_\alpha^{\beta_j})$から$\beta(f_\alpha^{\beta_j})$に状態が変化したとする。これを

$$\mathrm{e}^{-i\phi_\alpha(s_\alpha^{\beta_j})}\alpha^\star\to\mathrm{e}^{-i\phi_{\beta_j}(f_\alpha^{\beta_j})}\beta_j^\star$$

と表せるだろう。この表現は，k，$k'\in\mathbb{Z}$として

$$\alpha(2\pi k/a+s_\alpha^{\beta_j})\to\beta_j(2\pi k'/b_j+f_\alpha^{\beta_j})$$

という状態の変化も記述していることになる。$k'=k$と制限するならば，k，k'の不定性が除かれ，

$$\mathrm{e}^{-i\phi_\alpha(s_\alpha^{\beta_j})}\alpha^\star\to\mathrm{e}^{-i\phi_{\beta_j}(f_\alpha^{\beta_j})}\beta_j^\star$$

は，$k\in\mathbb{Z}$として

$$\alpha(2\pi k/a+s_\alpha^{\beta_j})\to\beta_j(2\pi k/b_j+f_\alpha^{\beta_j})$$

を表わす。

$\theta\in\mathbb{R}$として，

$$\mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{e}^{-i\phi_\alpha(s_\alpha^{\beta_j})}\alpha^\star\to\mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{e}^{-i\phi_{\beta_j}(f_\alpha^{\beta_j})}\beta_j^\star \tag{7}$$

のように，$\underline{\beta}$の測定の文脈で状態が変化すると仮定する。この要請は，$\mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{e}^{-i\phi_\alpha(s_\alpha^{\beta_j})}\alpha^\star$の状態が，$\mathrm{e}^{-i\phi_\alpha(s_\alpha^{\beta_j})}\alpha^\star$の状態に変化し，$\mathrm{e}^{-i\phi_{\beta_j}(f_\alpha^{\beta_j})}\beta_j^\star$に変化してから$\mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{e}^{-i\phi_{\beta_j}(f_\alpha^{\beta_j})}\beta_j^\star$に変化する変化に限るということを意味する。(7) より，

$$\alpha^\star\to\mathrm{e}^{-i\theta_\alpha^{\beta_j}}\beta_j^\star, \tag{8}$$

$$\mathrm{e}^{i\theta_\alpha^{\beta_j}}\alpha^\star\to\beta_j^\star \tag{9}$$

が成り立つ。

$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(0))$から$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(\theta))$への変化については，パラメータが時間の変化に応じて変化した場合は，

$$\alpha^\star\to\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star \tag{10}$$

と書くことにする。

［7］で考察された何等かの作用により $\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$ に変化する場合を

$$\alpha^\star \rightsquigarrow \mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star \tag{11}$$

と書くことにする。自発的な振動により，

$$\alpha^\star \rightsquigarrow \mathrm{e}^{-i(\theta+\pi)}\alpha^\star \tag{12}$$

という変化も同数生じる。それらの割合は，符号を含めて $v(\theta) = \cos\theta$ であった［7］。また， $\cos(\theta+\pi/2) = -\sin\theta$ の割合で

$$\alpha^\star \rightsquigarrow \mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2)}\alpha^\star, \alpha^\star \rightsquigarrow \mathrm{e}^{-i(\theta+3\pi/2)}\alpha^\star \tag{13}$$

という変化も生じる。変化の割合も含めて，

$$\alpha^\star \rightsquigarrow \cos\theta\cdot\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star \tag{14}$$

のように書くと便利であるので，そうする。

$$\alpha^\star \rightsquigarrow -\sin\theta\cdot\mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2)}\alpha^\star \tag{15}$$

も生じ得るが，これらの割合の合計が１にならないのは，これら２種類の変化の間を振動するからであった［7］。

α は，ある物理量 $A\colon Q\to\mathbb{R}$ が存在して，その測定の文脈 $\underline{\alpha}=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ があって，$\alpha=\alpha_1$ であるようなものとする。$\alpha^\star$ の状態にある系 Σ を，最初に $\underline{\beta}$ の測定の環境におき，次に $\underline{\alpha}$ の測定の環境のおくと，次のような状態の変化が，可能性として考えられる：

$$\alpha^\star \to \mathrm{e}^{-i\theta_\alpha^{\beta_j}}\beta_j^\star \to e^{-i(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha_k})}\alpha_k^\star. \tag{16}$$

このような変化が生じる割合は，思考の上では符号を含めて次ようになる：

$$l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\alpha_k). \tag{17}$$

$l(\beta_j,\alpha_k)$は非負の実数で，β_j から α_k へ変化する割合で，１以下であるが，振動する場合も含むことから，一般に $\sum_{k=1}^n l(\beta_j,\alpha_k)$ は１を超えることもある［7］。

この変化が $\alpha^\star$ の復元可能な変形になるためには，最後に $\alpha^\star$ の状態に戻る必要がある。そのために，β_j 内で $\mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j}^{\alpha}}\beta_j^\star$ になるような作用が働く必要がある［7］。そのような作用が働く場合は，

$$\begin{aligned}\alpha^\star &\to \mathrm{e}^{-i\theta_\alpha^{\beta_j}}\beta_j^\star \rightsquigarrow \cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha_k})\cdot\mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j}^{\alpha_k}}\beta_j^\star\\ &\to \cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha_k})\cdot\alpha_k^\star.\end{aligned} \tag{18}$$

となる。

このような変化が生じる割合は，思考の上では符号を含めて次のようになる：

$$l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\alpha_k)\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha_k}). \tag{19}$$

この変化が $\alpha^\star$ の復元可能な変形になるためには，

$$\sum_{j=1}^n l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\alpha_k)\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha_k}) = \delta_{k,1} \tag{20}$$

でなければならない。

（18）と同時に

$$\begin{aligned}&\alpha^\star \to \mathrm{e}^{-i\theta_\alpha^{\beta_j}}\beta_j^\star\\ &\rightsquigarrow -\sin(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha_k})\cdot\mathrm{e}^{i(\theta_{\beta_j}^{\alpha_k}+\pi/2)}\beta_j^\star\\ &\to -\sin(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha_k})\cdot\mathrm{e}^{i\pi/2}\alpha_k^\star.\end{aligned} \tag{21}$$

という変化も思考の上では生じ得る。復元可能な変形であるなら，これらの変化は実際には生じないので，

$$\sum_{j=1}^n l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\alpha_k)\sin(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha_k}) = 0 \tag{22}$$

を満たさなければならない。(20)と(22)は，まとめて

$$\sum_{j=1}^n l(\alpha,\beta_j)\mathrm{e}^{i\theta_\alpha^{\beta_j}}l(\beta_j,\alpha_k)\mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j}^{\alpha_k}} = \delta_{1,k} \tag{23}$$

と書ける。

従って，$l(\alpha,\beta_j) = l(\beta_j,\alpha)$［7］と(5)より，$\beta_j$ となる確率は

$$l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\alpha)\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha}) = l(\alpha,\beta_j)^2$$

となる。

$\underline{\gamma}=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}$を測定の文脈として，$\Sigma$を$\underline{\beta}$の環境に置いた後に，$\underline{\gamma}$の環境に置く場合を考えよう。思考上では次のような変化が考えられる：

$$\begin{aligned}&\alpha^\star\to \mathrm{e}^{-i\theta_\alpha^{\beta_j}}\beta_j^\star\to e^{-i(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k})}\gamma_k^\star\\&\to e^{-i(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\alpha_l})}\alpha_l^\star.\end{aligned}\tag{24}$$

$\underline{\beta}$の測定をする場合は，

$$\begin{aligned}&\alpha^\star\to \mathrm{e}^{-i\theta_\alpha^{\beta_j}}\beta_j^\star\rightsquigarrow\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\alpha_l})\cdot\mathrm{e}^{i(\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\alpha_l})}\beta_j^\star\\&\to\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\alpha_l})\cdot\mathrm{e}^{i\theta_{\gamma_k}^{\alpha_l}}\gamma_k^\star\\&\to\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma}^{\alpha_l})\cdot\alpha_l^\star\end{aligned}$$

という変化になる。この変化では後に$\underline{\gamma}$の環境に晒されることが先取りされている。$l=1$，すなわち$\alpha_l=\alpha$の場合，この確率は

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^n l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\gamma_k)l(\gamma_k,\alpha)\\&\times\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\alpha}).\end{aligned}\tag{25}$$

同時に思考上可能な変化である

$$\begin{aligned}&\alpha^\star\to \mathrm{e}^{-i\theta_\alpha^{\beta_j}}\beta_j^\star\rightsquigarrow\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\alpha}+\pi/2)\\&\cdot\mathrm{e}^{i(\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\alpha}+\pi/2)}\beta_j^\star\\&\to-\sin(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\alpha})\cdot\mathrm{e}^{i(\theta_{\gamma_k}^{\alpha}+\pi/2)}\gamma_k^\star\\&\to-\sin(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\alpha})\cdot\mathrm{e}^{i\pi/2}\alpha^\star\end{aligned}$$

は，復元可能な変形ではないので，この確率は0になる。

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^n l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\gamma_k)l(\gamma_k,\alpha)\\&\times(-\sin(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\alpha}))\\&=0.\end{aligned}$$

従って(25)は

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^n l(\alpha,\beta_j)\mathrm{e}^{i\theta_\alpha^{\beta_j}}l(\beta_j,\gamma_k)\mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}}\\&\times l(\gamma_k,\alpha)\mathrm{e}^{i\theta_{\gamma_k}^{\alpha}}\end{aligned}\tag{26}$$

に等しい。

これが，

$$\begin{aligned}&\alpha^\star\to \mathrm{e}^{-i\theta_\alpha^{\beta_j}}\beta_j^\star\rightsquigarrow\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha})\cdot\mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j}^{\alpha}}\beta_j^\star\\&\to\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha})\cdot\alpha^\star\end{aligned}\tag{27}$$

という変形で得られる確率と等しいとし，$l(\alpha,\beta_j)\neq0$なら

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^n l(\beta_j,\gamma_k)\mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}}l(\gamma_k,\alpha)\mathrm{e}^{i\theta_{\gamma_k}^{\alpha}}\\&=l(\beta_j,\alpha)\mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j}^{\alpha}}\end{aligned}\tag{28}$$

を得る。このような関係を満たす$l(\beta_j,\gamma_k)$や$\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}$の値は存在し，$\underline{\gamma}$の環境に晒されるか否かで状態が異なる変化をする場合でも，統計的には区別できないことになる。量子力学的対象とは，まさに測定においてこのように振舞う状態の集団をなすものであると言える。

$\underline{\gamma}$の測定をする場合は，

$$\begin{aligned}&\alpha^\star\to \mathrm{e}^{-i\theta_\alpha^{\beta_j}}\beta_j^\star\to \mathrm{e}^{-i(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k})}\gamma_k^\star\\&\rightsquigarrow\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\alpha_l})\cdot\mathrm{e}^{i\theta_{\gamma_k}^{\alpha_l}}\gamma_k^\star\\&\to\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\alpha_l})\cdot\alpha_l^\star\end{aligned}$$

という変化になり，$l(\gamma_k,\alpha)\neq0$のとき，同様の結果を得る：

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^n l(\alpha,\beta_j)\mathrm{e}^{i\theta_\alpha^{\beta_j}}l(\beta_j,\gamma_k)\mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}}\\&=l(\alpha,\gamma_k)\mathrm{e}^{i\theta_\alpha^{\gamma_k}}.\end{aligned}\tag{29}$$

実際に$\underline{\beta}$で測定をし，$\underline{\gamma}$でも測定をする場合は，上で考察した変化ではなく，

$$\begin{aligned}&\alpha^\star\to \mathrm{e}^{-i\theta_\alpha^{\beta_j}}\beta_j^\star\rightsquigarrow\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k})\cdot\mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}}\beta_j^\star\\&\to\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k})\cdot\gamma_k^\star\\&\rightsquigarrow\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k})\cos(\theta_{\gamma_k}^{\alpha})\cdot\mathrm{e}^{i\theta_{\gamma_k}^{\alpha}}\gamma_k^\star\\&\to\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k})\cos(\theta_{\gamma_k}^{\alpha})\cdot\alpha^\star\end{aligned}$$

のような変化になるはずである。この変形からの寄与は

$$\begin{aligned}&l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\gamma_k)l(\gamma_k,\alpha)\\&\times\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k})\cos(\theta_{\gamma_k}^{\alpha})\end{aligned}\tag{30}$$

となる。

同時に生じ得る変化のうち，以下のものは復元可能な変形になる：

$$\alpha^\star \to \mathrm{e}^{-i\theta_\alpha^{\beta_j}}\beta_j^\star$$
$$\rightsquigarrow \cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}+\pi/2)\cdot \mathrm{e}^{i(\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}+\pi/2)}\beta_j^\star$$
$$\to \cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}+\pi/2)\cdot \mathrm{e}^{i\pi/2}\gamma_k^\star$$
$$\rightsquigarrow \cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}+\pi/2)\cos(\theta_{\gamma_k}^{\alpha}+3\pi/2)$$
$$\times\, \mathrm{e}^{i(\theta_{\gamma_k}^{\alpha}+\pi/2+3\pi/2)}\gamma_k^\star$$
$$\to \cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}+\pi/2)\cos(\theta_{\gamma_k}^{\alpha}+3\pi/2)\cdot \mathrm{e}^{2\pi i}\alpha^\star$$

これら２種類の変形からの寄与は

$$l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\gamma_k)l(\gamma_k,\alpha) \times\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\alpha}) \tag{31}$$

となり，上で考察した場合と同じ結果となり，これ自体は正にも負にもなりうるので，$\underline{\beta}$と$\underline{\gamma}$の測定の同時確率とは解釈できないものである。

そこで，

$$\alpha^\star \to \mathrm{e}^{-i\theta_\alpha^{\beta_j}}\beta_j^\star \rightsquigarrow \cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha_l})\cdot \mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j}^{\alpha_l}}\beta_j^\star$$
$$\to \cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha_l})\cdot\alpha_l^\star$$
$$\to \cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha_l})\cdot \mathrm{e}^{-i\theta_{\alpha_l}^{\gamma_k}}\gamma_k^\star$$
$$\rightsquigarrow \cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha_l})\cos(\theta_{\alpha_l}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\alpha})\cdot \mathrm{e}^{i\theta_{\gamma_k}^{\alpha}}\gamma_k^\star$$
$$\to \cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha_l})\cos(\theta_{\alpha_l}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\alpha})\cdot\alpha^\star$$

という変化を考えてみよう。この復元可能な変形からの寄与は，

$$l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\alpha_l)\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha_l}) \times l(\alpha_l,\gamma_k)l(\gamma_k,\alpha)\cos(\theta_{\alpha_l}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\alpha}) \tag{32}$$

である。これは，$l\neq 1$の時は，正にも負にもなり得るので，実際に実現される変形とは限らない。しかし，$l=1$については，$l(\alpha,\beta_j)^2 l(\gamma_k,\alpha)^2$に等しく，負にならない。従って，そのいくつかは実現される変形と考えてよい。$\underline{\gamma}$の測定前に用意される$\alpha^\star$は次のようにして与えられるものである。

$$\alpha^\star \to \mathrm{e}^{-i\theta_\alpha^{\beta_j}}\beta_j^\star \rightsquigarrow \cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha_l})\cdot \mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j}^{\alpha_l}}\beta_j^\star$$
$$\to \cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha_l})\cdot\alpha_l^\star.$$

この変形において，$\beta_j^\star$に変化してからα^*に戻った状態は，最初の$\alpha^\star$の状態と同じであろうか？$\alpha^\star$は，$\{\alpha(\phi_\alpha^{-1}(2\pi l))\mid l\in\mathbb{Z}\}$であったので，最初は$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(2\pi l))$の状態であったが，次には$l$とは異なる$l'$の状態$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(2\pi l'))$になっていることが可能である。そのような場合は，$\underline{\gamma}$における測定結果は，

$$\alpha^\star \to \mathrm{e}^{-i\theta_\alpha^{\gamma_k}}\gamma_k^\star \rightsquigarrow \cos(\theta_\alpha^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\alpha})\cdot \mathrm{e}^{i\theta_{\gamma_k}^{\alpha_l}}\gamma_k^\star$$
$$\to \cos(\theta_\alpha^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\alpha})\cdot\alpha^\star$$

という変形の場合とは異なる結果になり得る。これは，単純に$\underline{\beta}$の測定の影響ともいえるが，Σが$\underline{\beta}$の環境に置かれる時間経過のなかで，$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(2\pi l))$から$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(2\pi l'))$へと自発的に変化したとも考えることができる。このような変化があったとしても，$\underline{\beta}$や$\underline{\gamma}$の測定の統計的結果は同じものとなってしまうので，状態の違いを統計的な測定結果だけで区別することはできないのである。

３．EPR-Bohm 思考実験の場合

Σは二つの部分系Σ^{I}とΣ^{II}より構成されているとする。各々の位相空間をQ^{I}，Q^{II}と書くと，$Q=Q^{\mathrm{I}}\times Q^{\mathrm{II}}$である。

EPR-Bohm 思考実験では，二つのスピンを持った粒子からなる系を考え，スピンの自由度について，以下のような考察をする［1, 3, 4, 5］。スピンのｘ方向，ｙ方向，ｚ方向の成分の値がアップであるかダウンであるかのオブザーバブルは，パウリ行列として良い。Σ^{I}の粒子のこのオブザーバブルは

$$\sigma_x^{\mathrm{I}}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\sigma_y^{\mathrm{I}}=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},$$
$$\sigma_z^{\mathrm{I}}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

である。σ_z^{I}の固有値１の固有状態を$|+\rangle^{\mathrm{I}}$，固有値－１の固有状態を$|-\rangle^{\mathrm{I}}$と表す。Σ^{II}についても同様である。Σのスピンのシングレット状態は$|s\rangle=(|+\rangle^{\mathrm{I}}\otimes|-\rangle^{\mathrm{II}}-|-\rangle^{\mathrm{I}}\otimes|+\rangle^{\mathrm{II}})/\sqrt{2}$である。

a，**b**を３次元単位ベクトルとする。**a**方向のΣ^{I}のスピン成分のアップまたはダウンのオブザーバブルは，$\mathbf{a}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}$である。平均$\langle s|\mathbf{a}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\otimes I|s\rangle=0$で，$\Sigma^{\mathrm{II}}$についても同様なので，相関は

$$C(\mathbf{a},\mathbf{b})=\langle s|\mathbf{a}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\otimes\mathbf{b}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{II}}|s\rangle \tag{33}$$

となる。Bell の不等式［3，4，2］は

$$|C(\mathbf{a},\mathbf{b})+C(\mathbf{a},\mathbf{b}')|-|C(\mathbf{a}',\mathbf{b})+C(\mathbf{a}',\mathbf{b}')|\leq 2 \tag{34}$$

であるが，(33)では，この不等式が破れる**a**，**a**′，**b**，**b**′の組み合わせが存在する。

$C(\mathbf{a},\mathbf{a})$を測定する測定の文脈を$\underline{\beta}$，$C(\mathbf{a},\mathbf{b})$を測定する測定の文脈を$\underline{\gamma}$，$C(\mathbf{a},\mathbf{b}')$を測定する測定の文脈を$\underline{\delta}$，$C(\mathbf{a}',\mathbf{b})$を測定する測定の文脈を$\underline{\varepsilon}$，$C(\mathbf{a}',\mathbf{b}')$を測定する測定の文脈を$\underline{\zeta}$で表すことにする。**a**，**a**′，**b**，**b**′が異なれば，これらの５つの測定の文脈は異なるものとなるので，５つの相関を同時に測定することはできない。

しかし，良く知られているように，縮退したオブザーバブルは異なる測定の文脈で測定可能である。例えば，$\mathbf{a}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\otimes I$は，$\underline{\beta}$と$\underline{\gamma}$と$\underline{\delta}$とで測定可能である。このようなオブザーバブルの存在が，隠れた変数について否定的な結論を導くために重要な役割を果たしている［8，4］。$\underline{\beta}$の測定の環境に置いて，次に$\underline{\gamma}$の測定の環境に置くことを，記号で$\underline{\beta}\rightharpoonup\underline{\gamma}$と書くことにする。$\underline{\beta}\rightharpoonup\underline{\gamma}$は，$I\otimes\mathbf{a}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{II}}$の**a**を**b**に回転させて得られる。このとき，$\mathbf{a}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\otimes I$の測定値を変化させないような変換は可能である。実際，そのような隠れた変数模型を作成することができる［6，10］。つまり，それらの模型では，$\underline{\beta}\rightharpoonup\underline{\gamma}$では，$\mathbf{a}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}$＝一定である。

Bell の不等式の導出では，$\mathbf{a}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\otimes I$は，$\underline{\gamma}$と$\underline{\delta}$で同一の値であることを仮定する。これが局所性の仮定である。更に，$\mathbf{a}'\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\otimes I$は，$\underline{\varepsilon}$と$\underline{\zeta}$で同一の値であることも仮定する。

この局所性の仮定は，$\underline{\beta}\rightarrow\underline{\gamma}$においては，$\Sigma^{\mathrm{II}}$だけに測定の影響が及ぶという解釈と整合的である。

更に，$\underline{\beta}\rightharpoonup\underline{\gamma}\rightharpoonup\underline{\delta}$でも局所性の仮定から，$\Sigma^{\mathrm{II}}$だけに測定の影響が及ぶので$\mathbf{a}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}$＝一定として良い。

$\underline{\beta}\rightharpoonup\underline{\gamma}$のあと，$\underline{\varepsilon}$で測定する，すなわち$\underline{\beta}\rightharpoonup\underline{\gamma}\rightharpoonup\underline{\varepsilon}$で，$\Sigma^{\mathrm{I}}$だけに測定の影響が及ぶので$\mathbf{b}\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{II}}$＝一定として良い。$\underline{\beta}\rightharpoonup\underline{\gamma}\rightarrow\underline{\delta}$のあと，$\underline{\zeta}$で測定する，すなわち$\underline{\beta}\rightharpoonup\underline{\gamma}\rightarrow\underline{\delta}\rightarrow\underline{\zeta}$で，$\Sigma^{\mathrm{I}}$だけに測定の影響が及ぶので$\mathbf{b}'\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{II}}$＝一定として良い。

$\underline{\beta}\rightharpoonup\underline{\gamma}\rightharpoonup\underline{\varepsilon}$の$\mathbf{a}'\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}$と，$\underline{\beta}\rightharpoonup\underline{\gamma}\rightarrow\underline{\delta}\rightharpoonup\underline{\zeta}$の$\mathbf{a}'\cdot\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}$は，$(\underline{\beta}\rightharpoonup)\underline{\gamma}\rightharpoonup\underline{\delta}$で$\Sigma^{\mathrm{I}}$に測定の影響はないはずなので，同じ値を取ると考えられて，Bell の不等式の導出のための前提が揃うことになる。

しかし，前節で考察したように，$(\underline{\beta}\rightharpoonup)\underline{\gamma}\rightharpoonup\underline{\delta}\rightharpoonup\underline{\zeta}$は$\underline{\beta}\rightharpoonup\underline{\delta}\rightharpoonup\underline{\zeta}$とは，異なる測定結果になることが可能で，それは$\underline{\gamma}$を経由することで生じる可能性である。$\underline{\gamma}$を経由することによる状態の変化について，局所性を仮定するとΣ^{II}だけに影響が及ぶはずなのにそうならないのだから局所性が失われているというのは一つの結論であるが，もう一つの可能性が残っている。それは前節で述べたように，$\underline{\gamma}$を経由することでかかる時間経過のあいだにΣ^{I}がその状態を自発的に変化させているという可能性である。量子力学的な局所的実在は，その状態を自発的に変化させるというものであるという可能性が残っているのである。このような局所的実在は，量子力学的状態が，周期的軌道という運動に対応しているという描像ととてもよく合っているし，カメレオン効果を連想させる［9］。

〔参考文献〕

［1］A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?",*Phys. Rev.* **47**, 777（1935）.

［2］J. S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*,（Cambridge University Press, Cambridge, 1987）.

［3］F. Selleri, "*Die Debatte um die Quantentheorie*"（Vieweg, Braunschweig, 1983）
［櫻山義夫訳「量子力学論争」（共立出版, 1986）］.

［4］M. Redhead, "*Incompleteness, Nonlocality, and Realism - a prolegomenon to the philosophy of quantum mechanics*",（Clarendon Press, Oxford, 1987）
［石垣寿郎訳「不完全性・非局所性・実在主義 - 量子力学の哲学序説」（みすず書房, 1997）］.

［5］S. Uchiyama, "Local Reality：Can It Exist in the EPR-Bohm Gedanken Experiment?", *Found. Phys.* , **25**（1995）1561-1575.

［6］内山　智，"機械論的量子論についての試論"，北星学園大学短期大学部北星論集，**18**，1-12（2020）.

［7］内山　智，"量子力学的状態の重ね合わせの意味"，北星学園大学短期大学部北星論集，**19**，89-98（2022）.

［8］S. Kochen and E. P. Specker, "The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics", *J. Math. & Mech.* **17**,59（1967）.

［9］L. Accardi, and S. Uchiyama, "Uniqueness of the EPR-chameleon model", *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics* **11**, 1-19（2007）.

［10］内山　智，"Bellの不等式を破る局所的な隠れた変形模型"，北星学園大学短期大学部北星論集，**3**，37-49（2005）.