北星学園大学短期大学部北星論集第19号（通巻第57号）（2022年３月）・抜刷

【研究ノート】

量子力学的状態の重ね合わせの意味

内　山　　　智

研究ノート

量子力学的状態の重ね合わせの意味

内　山　　　智
Satoshi UCHIYAMA

目　次

［Abstract］
The Meaning of Superposition of Quantum-Mechanical States

Based on the idea that a quantum-mechanical state corresponds to a periodic trajectory in a classical-mechanical phase space, it is considered what superposition of quantum-mechanical states means. We interpret that a U(1)-lift of a periodic trajectory represents the motion such that the state varies slowly when the phase factor is equal to unity and varies rapidly when the phase factor is equal to minus unity. When the phase of the U(1)-lift is shifted by an amount θ by some action, if the action allows such a motion possible that its phase is shifted by $\theta + \pi/2$, then the signed probability of the transition of the motion is given by $\cos\theta$. When a physical quantity measured on the U(1)-lift is made, the motion is transformed into a motion which is represented by the U(1)-lift that corresponds to the quantized physical quantity. The interpretation is given as follows: The amplitude of a wave function is the weight of the transition to which the possibility of transitions by an oscillation between eventual transitions before the eventual transitions are discovered is combined; In superposition, the additional possibility of the transitions is canceled.

1．はじめに

拙稿 [1] において、量子力学的状態は周期的な軌道をなす状態であり、測定においては常にその軌道上に分布するように状態が用意されるという解釈を試みた。量子力学的状態が周期的軌道と関係するという考えは、前期量子論のような原子の安定性だけではなく、干渉現象の説明にもなる可能性が [2] で考察されたように、量子力学的状態の理解に有望である。拙稿 [1, 3, 4] においては、周期的軌道上に分布する状態のアンサンブルを量子力学的状態と解釈したが、それらの周期的軌道が変形され別の周期的軌道に遷移するとき、位相のずれによる遷移確率についての考察が不十分であったので、本稿ではそれについて考察する。

2．周期的軌道としての量子力学的状態

物理的対象を取り巻く環境と相互作用した結果、周期的軌道を描く物理的な対象である

キーワード：量子力学的確率 , 隠れた変数 , 周期的軌道
Key words：Quantum-mechanical Probability, Hidden Variables, Periodic Trajectories

系Σを考え、この物理的な対象の位相空間をQで表わす。Qはシンプレクティック多様体であるとする。この周期的軌道は、一定の条件のもとに物理的対象が取り得る状態の変化を表していると解釈しよう。測定実験において用意される対象の状態は、周期的軌道で取り得る状態である。何度も繰り返される実験において、この軌道のパラメーターsはエルゴード的に実験結果の統計的性質を記述するパラメーターと想定されている。

Q内の周期的軌道αについて、その周期をT_αとすると、パラメーターsの単調増加関数ϕ_αによって、αの U(1)- リフト$\alpha^\star$が次によって定義される [2]。

$$\alpha^\star(s) := \Big(\alpha(s), \mathrm{e}^{i\phi_\alpha(s)}\Big), \quad s \in [0, T_\alpha]. \quad (1)$$

周期的軌道と言っても、αは、$s \in [0, T_\alpha]$において交わったり、或いは多重に周回していても良いので、Q内の力学的な方程式の解軌道というわけではない。

[1] では、ϕ_αはα内のいくつかの状態のみが用意されるという状況を表現するために導入されたもので、$\mathrm{e}^{i\phi_\alpha(s)} = 1$となる$s$のときの状態$\alpha(s)$が用意されているということを表現しているとした。つまり、

$$\Big\{\alpha(s) \in Q \;\Big|\; \mathrm{e}^{i\phi_\alpha(s)} = 1,\ s \in [0, T_\alpha]\Big\}$$
$$= \big\{\alpha(\phi_\alpha^{-1}(2\pi n)) \in Q \;\big|\; n = 0, 1, 2, \cdots, L\big\}$$

という状態の集合を表すとしていた。ここで、$L = (\phi_\alpha(T_\alpha) - \phi_\alpha(0))/(2\pi)$である。

しかし、この解釈では重ね合わせにおける負の値の解釈が上手くいかない。そこで、簡単のために$\phi_\alpha(0)$ =0とすることにして、次のように解釈するとしよう。

> $\alpha^\star(\cdot)$は、$n = 0, 1, \cdots, L$として、$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(0))$から出発して、$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(\pi + 2\pi n))$を素早く通過し、$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(2\pi n))$ではゆっくり通過するという自発的な運動$\tilde{\alpha}(\cdot)$を表すと解釈する。これらの状態以外では、$\tilde{\alpha}(\cdot)$は$\alpha(\cdot)$からずれている。ゆっくり通過する状態で測定される可能性は高く、素早く通過する状態で測定される可能性は低い。

同じことではあるが、式を使って表現すると、n=0,1,2,$\cdots$,Lについて、$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(2\pi n)) = \widetilde{\alpha}(\phi_\alpha(2\pi n))$、$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(\pi + 2\pi n)) = \widetilde{\alpha}(\phi_\alpha^{-1}(\pi + 2\pi n))$であるが、それら以外の$s$では$\alpha(s) \neq \widetilde{\alpha}(s)$であり、$\widetilde{\alpha}(\cdot)$は$\widetilde{\alpha}(\phi_\alpha^{-1}(2\pi n))$で遅く、$\widetilde{\alpha}(\phi_\alpha^{-1}(\pi + 2\pi n))$で速いという運動である。

任意の$\theta \in \mathbb{R}$に対して

$$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star(s) := \Big(\alpha(s), \mathrm{e}^{i(\phi_\alpha(s)-\theta)}\Big), s \in [0, T_\alpha]. \quad (2)$$

と定義する。

すると、$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$は、$n$ = 0,1,$\cdots$,Lとして、$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(\theta))$から出発して、$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(\theta + \pi + 2\pi n))$を素早く通過し、$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(\theta + 2\pi n))$ではゆっくり通過する運動$\tilde{\alpha}(\phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(\cdot) + \theta))$を表す。

$\theta = \pi$とすると、位相はπだけずれているが、$\mathrm{e}^{-i\pi}\alpha^\star$は$\alpha^\star$と$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(\pi + 2\pi n))$という共通の状態を通して、互いに遷移し得る。**この$\alpha^\star \to \mathrm{e}^{-i\pi}\alpha^\star$、$\mathrm{e}^{-i\pi}\alpha^\star \to \alpha^\star$という遷移は、他の作用なしに自発的に生じると仮定する。**

αが変形されたとき、その U(1)- リフトと元の$\alpha^\star$の交点、すなわち位相ϕ_αと一致する点があれば、その点を介してもとの$\alpha^\star$に戻ることができるので、**復元可能な変形**と言え

る。

物理量$B : Q \to \mathbb{R}$の測定の文脈$\underline{\beta} = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$において [2,3]、$\alpha$から$\beta_j$に分岐するとき、$\alpha(s_\alpha^{\beta_j})$で$\alpha$から離れ、$\beta_j(f_\alpha^{\beta_j})$で$\beta_j$に到達するとしよう。このようにして、$\alpha^\star \to \beta_j^\star$という運動の遷移が起こる。この遷移における位相のずれは、$\phi_{\beta_j}(f_\alpha^{\beta_j}) - \phi_\alpha(s_\alpha^{\beta_j})$である。この位相のずれを

$$\theta_\alpha^{\beta_j} := \phi_{\beta_j}(f_\alpha^{\beta_j}) - \phi_\alpha(s_\alpha^{\beta_j}) \tag{3}$$

で表そう。

周期的軌道αからβ_jに遷移するときの$s_\alpha^{\beta_j}$と$f_\alpha^{\beta_j}$は、$\alpha(s_\alpha^{\beta_j})$と$\beta_j(f_\alpha^{\beta_j})$が$Q$の中で近い点である場合が多いと考えることは自然である。そうであるならば、β_jからαへの遷移も、近い点を結ぶようなものであろう。つまり、$\alpha(s_\alpha^{\beta_j}) = \alpha(f_{\beta_j}^\alpha)$と$\beta_j(f_\alpha^{\beta_j}) = \beta_j(s_{\beta_j}^\alpha)$が成立するであろう。このことから、

$$s_\alpha^{\beta_j} = f_{\beta_j}^\alpha, \tag{4}$$

$$f_\alpha^{\beta_j} = s_{\beta_j}^\alpha \tag{5}$$

を仮定しよう。すると、(3) より、

$$\theta_{\beta_j}^\alpha = -\theta_\alpha^{\beta_j} \tag{6}$$

となる。

3. 自発的遷移と符号付き確率

$\alpha^\star$が用意されたとする。$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$とは位相が$\theta$だけずれているので、$\alpha^\star \to \mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$という遷移をするのは、例えば$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(0))$という状態から$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(\theta))$に遷移するような何らかの作用が働いた結果と考えられ、そうでない場合は$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$とは異なる運動に遷移するであろう。

$\alpha^\star$と$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$は、$\alpha^\star(\cdot)$に属する共通の状態の$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(2\pi n))$や$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(\pi+2\pi n))$において自発的な運動で互いに遷移し得る。$\theta \in (0,\pi)$の時は、$\alpha^\star$と$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$は同様の共通の状態がないので、自発的な運動だけでは遷移しないが、別の作用が働くことで遷移する可能性はある。しかし、$\theta = 0$と$\theta = \pi$から最も遠い$\theta = \pi/2$では、遷移する可能性が最も低く、$\alpha^\star$から$\mathrm{e}^{-i\pi/2}\alpha^\star$へ遷移しないと考えるのは自然であろう。このような考察から、以下を仮定することにする。

この作用は、最終的に$\alpha^\star \to \mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$または$\alpha^\star \to \mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2)}\alpha^\star$という遷移だけを生ずるようなものであると仮定しよう。

自発的な遷移が生じるために、この作用の後に最終的に生じ得る運動は、$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$、$\mathrm{e}^{-i(\theta+\pi)}\alpha^\star$、$\mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2)}\alpha^\star$、$\mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2+\pi)}\alpha^\star$の4 種類である。自発的な遷移により、$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$と$\mathrm{e}^{-i(\theta+\pi)}\alpha^\star$は互いに自発的に遷移するので、それが生じる可能性は等しく、自発的遷移を考慮するならこれらの一方を最終的に生じ得る運動として取り扱ってよい。同様の理由で、自発的遷移を考慮するなら$\mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2)}\alpha^\star$と$\mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2+\pi)}\alpha^\star$の内の一つを最終的に生じ得る運動と取り扱って良い。結局、$\alpha^\star \to \mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$という遷移を生ずる作用が働くと、同時に$\alpha^\star \to \mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2)}\alpha^\star$という遷移が生じるというとき、自発的な遷移の一方を代表として取り上げているのである。

基本的な仮定は以上である。

この作用のもとに$\alpha^\star \to \mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$という遷移が生ずる確率を$p(\theta)$で表すことにする。すると、$\alpha^\star \to \mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2)}\alpha^\star$という遷移が生ずる確率は$1 - p(\theta)$である。

最終的にこれらに遷移する途中では、$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$と$\mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2)}\alpha^\star$の間を振動する場合もあるであろう。もし最終的に遷移先が決まる前に測定する可能性も含めるとするなら、振動する場合になる割合を$V(\theta, \theta+\pi/2)$で表すとしよう。するとN個の$\alpha^\star$が準備された場合に、$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(\theta+2\pi n))(n = 0, 1, \cdots, L)$の状態で測定される可能性のある遷移の数は

$$N\left(p(\theta)+V(\theta,\theta+\pi/2)\right)\leq N$$

である。つまり、$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^{\star}\leftrightarrow\mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2)}\alpha^{\star}$のように振動して最終的に$\mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2)}\alpha^{\star}$に遷移する分だけの個数$NV(\theta,\theta+\pi/2)$が、最終的に$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^{\star}$に遷移する場合の$Np(\theta)$個に付け加わる。

同様に、$\alpha(\phi_{\alpha}^{-1}(\theta+\pi/2+2\pi n))$ $(n=0, 1, \cdots, L)$ の状態で測定される可能性のある遷移の数は

$$N\left(1-p(\theta)+V(\theta+\pi/2,\theta)\right)\leq N$$

である。つまり、$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^{\star}\leftrightarrow\mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2)}\alpha^{\star}$のように振動して最終的に$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^{\star}$に遷移する分だけの個数$NV(\theta+\pi/2,\theta)$が、最終的に$\mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2)}\alpha^{\star}$に遷移する場合の $N(1-p(\theta))$ 個に付け加わる。

$\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$として、問題としている作用によって$\alpha^{\star}\rightarrow\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^{\star}$という遷移をする場合に、$\alpha(\phi_{\alpha}^{-1}(\theta+2\pi n))$ $(n=0, 1, \cdots, L)$ の状態で測定される可能性がある確率を$w(\theta)$であらわそう。すなわち、

$$w(\theta)=p(\theta)+V(\theta,\theta+\pi/2) \tag{7}$$

であり、

$$V(\theta,\theta+\pi/2)\leq 1-p(\theta) \tag{8}$$

でなければならない。

問題としている作用によって$\alpha^{\star}\rightarrow\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^{\star}$という遷移をする場合に、$\alpha(\phi_{\alpha}^{-1}(\theta+\pi/2+2\pi n))$ $(n=0, 1, \cdots, L)$ の状態で測定される可能性がある確率を$u(\theta)$であらわそう。すなわち、

$$u(\theta)=1-p(\theta)+V(\theta+\pi/2,\theta), \tag{9}$$

$\theta+\pi/2\in[0,\pi]$であり、

$$V(\theta+\pi/2,\theta)\leq p(\theta) \tag{10}$$

でなければならない。

$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^{\star}\leftrightarrow\mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2)}\alpha^{\star}$という振動があるため、

$$\begin{aligned} &w(\theta)+u(\theta)\\ =&1+V(\theta,\theta+\pi/2)+V(\theta+\pi/2,\theta)\\ \geq&1 \end{aligned} \tag{11}$$

である。また、

$$\begin{aligned} &w(\theta)+u(\theta)\\ =&1+V(\theta,\theta+\pi/2)+V(\theta+\pi/2,\theta)\\ \leq&1+1-p(\theta)+p(\theta)=2 \end{aligned} \tag{12}$$

である。

$\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$について、$\alpha^{\star}\rightarrow\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^{\star}$と$\alpha^{\star}\rightarrow\mathrm{e}^{i\theta}\alpha^{\star}$という遷移を生ずる作用として、その確率が等しいとものとしよう：

$$w(-\theta)=w(\theta). \tag{13}$$

また、θ について2π ずらすことは、$\alpha(\phi_{\alpha}^{-1}(\theta+2\pi n))$を$\alpha(\phi_{\alpha}^{-1}(\theta+2\pi(n+1)))$にするだけなので、$\alpha^{\star}\rightarrow\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^{\star}$の遷移と同じであることから、$w$ は2π の周期性を持っている。

$$w(\theta+2\pi)=w(\theta). \tag{14}$$

また、$\theta=0$ のときは、$\alpha^{\star}\rightarrow\alpha^{\star}$ のように異なる運動に遷移しないで元のままなので、$p(0)=1$ である。$w(\theta)\leq 1$ であったので、$V(0,\pi/2)=0$であるので、従って $w(0)=1$である。

$\alpha^{\star}\rightarrow\mathrm{e}^{-i\pi/2}\alpha^{\star}$と$\alpha^{\star}\rightarrow\mathrm{e}^{-i(0+\pi/2)}\alpha^{\star}$という遷移を生ずる作用は同じと考えられるので、$w(\pi/2)=u(0)$ である。従って

$$w(\pi/2)=u(0)=1-p(0)+V(\pi/2,0)=0 \tag{15}$$

である。

$\theta\in(\pi/2,\pi/2+\pi)$ の場合、$\alpha^{\star}\rightarrow\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^{\star}$という遷移は、$\alpha^{\star}\rightarrow\mathrm{e}^{-i(\theta-\pi)}\alpha^{\star}$を生ずる作用で遷移して$\alpha(\phi_{\alpha}^{-1}(\theta-\pi))$から自発的な遷移で$\alpha(\phi_{\alpha}^{-1}(\theta))$の状態に到達することで可能

である。従ってこの確率 $w(\theta)$ は $w(\theta-\pi)=p(\theta)+V(\theta-\pi,\theta-\pi/2)$に等しい。このことを、$[-\pi/2,\pi/2]$ から拡張して確率 w に符号を付けて表現しよう。すなわち、

1) $v(\theta):=w(\theta),\quad \theta\in[-\pi/2,\pi/2]$

2) $v(\theta-\pi)=-v(\theta)$

のように w を $(-\pi/2,\pi/2)$ から拡張したものを**符号付き確率** v とする。

2) より

$v(\theta+2\pi)=v(\theta+\pi+\pi)=-v(\theta+\pi)=v(\theta)$

となり、w と整合的に v も 2π の周期性を持つ。

$\alpha^\star\to \mathrm{e}^{i\theta}\alpha^\star$ という遷移において、$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(\theta))$には$|v(\theta)|$、$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(\theta+\pi))$の状態には自発的遷移する$|v(\theta+\pi)|$の確率でなりうるが、$v$ の符号が負の状態は素早く通過する状態で、符号が正の場合はゆっくり通過する状態に対応している。

更に$\alpha^\star\to \mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star\to \mathrm{e}^{-i\phi}\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$という遷移をした場合は、$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(\theta+\phi))$の状態で測定される可能性がある確率は $v(\theta)v(\phi)$ となる。$v(\theta)$ と $v(\phi)$ が異符号の場合は、どちらか一方が自発的遷移できる状態を素早く通過することから、$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(\theta+\phi))$の状態を素早く通過する。同符号の場合は、ともに正の時は、自発的遷移できる素早く通過する状態にはならずに、ゆっくり通過する状態となる。ともに負の場合は、自発的遷移で素早く通過する状態になり、さらに自発的遷移できる素早く通過する状態になるので、結果として、自発的遷移できるすばやく通過する状態にならずにゆっくり通過する状態になる。

このように、自発的遷移による遷移であるのか否かを負か正の符号で表現して、符号付確率 v をかけるという計算が成立する。

今考察している作用は、最終的に$\alpha^\star\to \mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$または$\alpha^\star\to \mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2)}\alpha^\star$という遷移だけを生ずるようなものであると仮定したので、この作用によって$\alpha^\star\to \mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2)}\alpha^\star$という遷移が生ずる。これと同時に$\alpha^\star\to \mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2+\pi/2)}\alpha^\star$という遷移が生ずるというのが仮定であったが、$\mathrm{e}^{-i(\theta+\pi)}\alpha^\star$と$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$は自発的遷移で遷移し得るものである。この自発的遷移を通じて測定される場合は、それは確率の符号として表現される。いずれにしても、

$$u(\theta)=|v(\theta+\pi/2)|$$

という関係を得る。

N 個の $\alpha^\star$ が用意されたとして、上述したような作用によって$\alpha^\star\to \mathrm{e}^{-i\phi}\alpha^\star$という遷移が生じさせられたなら、振動する場合を追加して、$\mathrm{e}^{-i\phi}\alpha^\star$として測定される可能性があるのは $Nv(\phi)$ 個であり、同時に$\alpha^\star\to \mathrm{e}^{-i(\phi+\pi/2)}\alpha^\star$という遷移も生じ得て、$\mathrm{e}^{-i(\phi+\pi/2)}\alpha^\star$として測定される可能性があるのは $Nv(\phi+\pi/2)$ 個である。ここで v は符号付きで、負の場合は自発的遷移できる状態を通じて測定されることを意味している。

更に、$\mathrm{e}^{-i(\theta+\phi)}\alpha^\star$へ遷移させる場合を考えよう。$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(\theta+\phi))$の状態に到達して測定される遷移は、$\alpha^\star\to \mathrm{e}^{-i\phi}\alpha^\star\to \mathrm{e}^{-i\theta}\cdot\mathrm{e}^{-i\phi}\alpha^\star$が $Nv(\phi)v(\theta)$ 個あり、$\alpha^\star\to\mathrm{e}^{-i(\phi+\pi/2)}\alpha^\star\to \mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2)}\cdot\mathrm{e}^{-i(\phi+\pi/2)}\alpha^\star$が $Nv(\phi+\pi/2)v(\theta+\pi/2)$ 個ある。

$v(\phi)v(\theta)$ と $v(\phi+\pi/2)v(\theta+\pi/2)$ の正負が一致する場合は、$\mathrm{e}^{-i\phi}\alpha^\star\leftrightarrow \mathrm{e}^{-i(\phi+\pi/2)}\alpha^\star$の振動も含めた測定可能な個数の総和を表す。

$v(\phi)v(\theta)$ と $v(\phi+\pi/2)v(\theta+\pi/2)$ の正負が異なる場合は、キャンセルされる個数は $\min\{V(\phi,\phi+\pi/2),V(\phi+\pi/2,\phi)\}$ の割合で生ずる$\mathrm{e}^{-i\phi}\alpha^\star\leftrightarrow \mathrm{e}^{-i(\phi+\pi/2)}\alpha^\star$の振動の一部で、その結果は最終的な運動だけになった個数と残った振動の可能性の個数を表す。なぜなら、$\mathrm{e}^{-i\phi}\alpha^\star\leftrightarrow \mathrm{e}^{-i(\phi+\pi/2)}\alpha^\star$の振動は最終的にどちらかになるものして同一の状態$\alpha^\star$から可能性として分岐しただけで、実際には存在せず、最終的に測定されることはないので、そのような振動の対は無くてもよいからである。これが重ね合わせの意味の本質であ

る。

いずれの場合でも、$N(v(\phi)v(\theta)+v(\phi+\pi/2)v(\theta+\pi/2))$ は測定可能な個数という解釈が成立する。ただし、正負の符号は、自発的遷移できる状態を通じて測定されるか否かを表現している。

この解釈を維持しつつ、$\alpha^\star\rightarrow \mathrm{e}^{-i(\theta+\phi)}\alpha^\star$ という遷移と同じ運動$\mathrm{e}^{-i(\theta+\phi)}\alpha^\star$に到達する $\alpha^\star \rightarrow \mathrm{e}^{-i\phi}\alpha^\star \rightarrow \mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{e}^{-i\phi}\alpha^\star$ と $\alpha^\star\rightarrow \mathrm{e}^{-i(\phi+\pi/2)}\alpha^\star \rightarrow \mathrm{e}^{-i(\theta+\pi/2)}\cdot\mathrm{e}^{-i(\phi+\pi/2)}\alpha^\star$という遷移が、同じ測定の可能性を表すと要請するとどうなるかを以下で調べよう。

$\alpha^\star\rightarrow \mathrm{e}^{-i(\theta+\phi)}\alpha^\star$と同じ測定の可能性があるということから、次の条件を得る：

$$v(\theta+\phi)=v(\phi)v(\theta)+v(\phi+\pi/2)v(\theta+\pi/2).$$

この式をϕで微分すると、v' を v の導関数として、

$$v'(\theta+\phi)=v'(\phi)v(\theta)+v'(\phi+\pi/2)v(\theta+\pi/2)$$

となる。同様に θ で微分すると

$$v'(\theta+\phi)=v(\phi)v'(\theta)+v(\phi+\pi/2)v'(\theta+\pi/2)$$

を得る。両式の左辺は等しいので、

$$\begin{aligned} & v'(\phi)v(\theta)+v'(\phi+\pi/2)v(\theta+\pi/2) \\ = \ & v(\phi)v'(\theta)+v(\phi+\pi/2)v'(\theta+\pi/2) \end{aligned}$$

である。$\varphi=0$で $v(\varphi)$ は最大なので、$v'(0)=0$ である。$v(\pm\pi/2)=0$、$v(0)=1$であったので、$\phi=0$とすると、

$$v'(\theta)=v'(\pi/2)v(\theta+\pi/2).$$

これを θ で微分すると、

$$\begin{aligned} v''(\theta) &= v'(\pi/2)v'(\theta+\pi/2) \\ &= \left(v'(\pi/2)\right)^2 v(\theta+\pi) \\ &= -\left(v'(\pi/2)\right)^2 v(\theta). \end{aligned}$$

v は偶関数であったので、

$$v(\theta)=\cos(v'(\pi/2)\theta). \tag{16}$$

$v(\pi/2)=0$より、

$$v'(\pi/2)=\pm1+4n, n\in\mathbb{Z}.$$

$v(\varphi)=w(\varphi)\geq 0, \varphi\in(-\pi/2,\pi/2)$なので、$n=0$、

$$v'(\pi/2)=\pm1$$

でなければならない。故に、

$$v(\theta)=\cos(\theta). \tag{17}$$

4. 重ね合わせの意味

$\alpha^\star$を測定の文脈$\underline{\beta}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ で測定する場合を考えよう。

最終的には$\beta_1,\cdots\beta_n$ のどれかに遷移するが、最終的にβ_j に遷移する確率を $p(\beta_j|\alpha)$ とする。

$$\sum_{j=1}^{n} p(\beta_j|\alpha)=1$$

である。

最終的に$\alpha^\star$からβ_k に遷移するが、その途中で β_j とβ_k の間で振動する割合を $V(\beta_j,\beta_\mathrm{k}|\alpha)$ とする。尚、$V(\beta_j,\beta_j|\alpha)=0$ である。

$\alpha^\star$から$\beta_1,\cdots,\beta_\mathrm{n}$ に遷移して測定される可能性の確率にその途中で振動するものも測定される可能性に含んだ確率 $l(\alpha,\beta_1),\cdots,l(\alpha,\beta_\mathrm{n})$ は次の通りである：

$$l(\alpha,\beta_j)=p(\beta_j|\alpha)+\sum_{k=1}^{n}V(\beta_j,\beta_k|\alpha).$$

新たに生成されるものは何もないので、$0\leq l(\alpha,\beta_j)\leq 1$ である。

$l(\alpha, \beta_j)$ は、$k \neq j$ なる β_k での測定はせずに、β_j と β_k の間の振動が残っている場合に β_j に見いだされる確率である。波動関数の振幅には、このような意味がある。

また、最終的に β_k に遷移するものが振動する対となる β_j は可能性としては一つに決定されていない。もしそうでないとすると、

$$\sum_{j=1}^{n} V(\beta_j, \beta_k|\alpha) \leq p(\beta_k|\alpha)$$

でなければならない。

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V(\beta_j, \beta_k|\alpha) \leq \sum_{k=1}^{n} p(\beta_k|\alpha) = 1.$$

従って、

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} l(\alpha, \beta_j) \\ = & \sum_{j=1}^{n} p(\beta_j|\alpha) + \sum_{j,k=1}^{n} V(\beta_j, \beta_k|\alpha) \\ \leq & \ 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

となるが、$l(\alpha, \beta_j)$ にこのような制約は必要ないからである。

$$\sum_{j=1}^{n} l(\alpha, \beta_j) = 1 + \sum_{j,k=1}^{n} V(\beta_j, \beta_k|\alpha) \geq 1 \quad (18)$$

である。

$$\begin{aligned} q_j &:= l(\alpha, \beta_j) - p(\beta_j|\alpha), && (19) \\ V_{ij} &:= V(\beta_i, \beta_j|\alpha) && (20) \end{aligned}$$

と置く。

V_{ij} を q_j で表現することができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{*1} &:= (V_{21}, \cdots, V_{n1})^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{V}_{1*} &:= (V_{12}, \cdots, V_{1n})^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{q} &:= (q_2, \cdots, q_n)^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{1} &:= (\underbrace{1, \cdots, 1}_{n-1\text{ 個}})^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

とおくと、

$$\left(\begin{array}{c} q_1 \\ \hline \mathbf{q} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} V_{11} & \mathbf{V}_{1*}^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathbf{V}_{*1} & \widetilde{V} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline \mathbf{1} \end{array}\right). \quad (21)$$

$\widetilde{V}$ は (V_{ij}) の小行列で、$(\widetilde{V})_{ij} = V_{ij}$, $i, j = 2, \cdots, n$.

これを (V_{ij}) について解くために、$\mathbf{r}$ と $\widetilde{Q}$、$\widetilde{U}$ を未定とする。

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathbf{1} & \widetilde{U} \end{array}\right)$$

の逆行列は

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \hline -\widetilde{U}^{-1}\mathbf{1} & \widetilde{U}^{-1} \end{array}\right)$$

である。

$$\left(\begin{array}{c|c} q_1 & \mathbf{r}^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathbf{q} & \widetilde{Q} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} V_{11} & \mathbf{V}_{1*}^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathbf{V}_{*1} & \widetilde{V} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathbf{1} & \widetilde{U} \end{array}\right) \quad (22)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c|c} V_{11} & \mathbf{V}_{1*}^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathbf{V}_{*1} & \widetilde{V} \end{array}\right) \\ = & \left(\begin{array}{c|c} q_1 & \mathbf{r}^{\mathrm{T}} \\ \hline \mathbf{q} & \widetilde{Q} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}^{\mathrm{T}} \\ \hline -\widetilde{U}^{-1}\mathbf{1} & \widetilde{U}^{-1} \end{array}\right) \quad (23) \\ = & \left(\begin{array}{c|c} q_1 - \mathbf{r}^{\mathrm{T}}\widetilde{U}^{-1}\mathbf{1} & \mathbf{r}^{\mathrm{T}}\widetilde{U}^{-1} \\ \hline \mathbf{q} - \widetilde{Q}\widetilde{U}^{-1}\mathbf{1} & \widetilde{Q}\widetilde{U}^{-1} \end{array}\right) \end{aligned}$$

と解ける。従って、$\mathbf{r}$ と $\widetilde{Q}$ は以下を満たさなければならない。

$$\widetilde{Q} = \widetilde{V}\widetilde{U}, \quad \mathbf{r} = \widetilde{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}_{1*}. \quad (24)$$

$\widetilde{U}=I$とすると、

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{V}_{1*} \geq 0; \\ (\widetilde{Q})_{jk} &= (\widetilde{V})_{jk} \geq 0; \\ (\widetilde{Q})_{jj} &= (\widetilde{V})_{jj} = 0. \end{aligned}$$

$\alpha^\star$の運動がN個用意されたとする。まず、測定の文脈$\underline{\beta}$の環境に置かれることにより、$\alpha^\star \to \beta_j^\star$という遷移が引き起こされる場合を考えよう。この場合、$\alpha(s_\alpha^{\beta_j})$から$\beta_j(f_\alpha^{\beta_j})$へと遷移すると考えていた。従って、$\mathrm{e}^{-i\phi_\alpha(s_\alpha^{\beta_j})}\alpha^\star \to e^{-i\phi_{\beta_j}(f_\alpha^{\beta_j})}\beta_j^\star$という遷移は、$Nl(\alpha,\beta_j)$個測定される可能性がある。

θを任意の実数として、状態$\alpha(\phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(s_\alpha^{\beta_j})-\theta))$から状態$\alpha(s_\alpha^{\beta_j})$に変化してから、$\beta_j(f_\alpha^{\beta_j})$へと遷移し状態$\beta_j(\phi_{\beta_j}^{-1}(\phi_{\beta_j}(f_\alpha^{\beta_j})-\theta))$に変化する場合は、$\mathrm{e}^{-i(\phi_\alpha(s_\alpha^{\beta_j})-\theta)}\alpha^\star \to \mathrm{e}^{-i(\phi_{\beta_j}(f_\alpha^{\beta_j})-\theta)}\beta_j^\star$という遷移になり、状態の変化において可能性の数は変化しないので、この遷移も$Nl(\alpha,\beta_j)$個測定される可能性がある。

$\alpha^\star=\mathrm{e}^{-i(\phi_\alpha(s_\alpha^{\beta_j})-\phi_\alpha(s_\alpha^{\beta_j}))}\alpha^\star$なので、$\mathrm{e}^{-i(\phi_\beta(f_\alpha^{\beta_j})-\phi_\alpha(s_\alpha^{\beta_j}))}\beta^\star$に遷移するのは、$Nl(\alpha,\beta_j)$個測定される可能性がある。$\theta_\alpha^{\beta_j}:=\phi_\beta(f_\alpha^{\beta_j})-\phi_\alpha(s_\alpha^{\beta_j})$だったので、$\mathrm{e}^{-i\theta_\alpha^{\beta_j}}\beta_j^\star \to \beta_j^\star$に遷移するのは、$Nl(\alpha,\beta_j)\cos(-\theta_\alpha^{\beta_j})$個測定される可能性がある。それと同時に、$\mathrm{e}^{-i\theta_\alpha^{\beta_j}}\beta_j^\star \to \mathrm{e}^{-i\pi/2}\beta_j^\star$という遷移も生ずる可能性があり、その遷移は$Nl(\alpha,\beta_j)\cos(-\theta_\alpha^{\beta_j}+\pi/2)$個測定される可能性がある。

同様にして、初期の運動としてN個の$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$を用意した場合は、$\beta_j^\star$への遷移が測定される可能性の個数は、$N\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta)\cdot l(\alpha,\beta_j)$である。同時に、$\mathrm{e}^{-i\pi/2}\beta_j^\star$への遷移が測定される可能性の個数は、$\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta-\pi/2)\cdot l(\alpha,\beta_j)$である。このように初期の運動の開始位置を変化させると、測定される可能性の符号付き確率も変化する。

ところが、β_jから再び$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha$に戻るような遷移が引き続き生じ得る場合を考えよう。この過程を記号で$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star \to \beta_j^\star \hookrightarrow \mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$と書くことにする。$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star \to \beta_j^\star \hookrightarrow \mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$の符号付き確率は$\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta)\cos(\theta_{\beta_j}^\alpha+\theta)l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\alpha)$である。同時に$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star \to \mathrm{e}^{-i\pi/2}\beta_j^\star \hookrightarrow \mathrm{e}^{-i\pi/2}\mathrm{e}^{-i(\pi/2+\pi)}\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star = \mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$という遷移も生じる可能性があり、その符号付き確率は$\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta-\pi/2)\cos(\theta_{\beta_j}^\alpha-\theta+\pi/2+\pi)l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\alpha)$である。これらの和は、$\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^\alpha)l(\alpha,\beta_j)^2$であるので、$\theta$に依存しない。また、$\theta_{\beta_j}^\alpha=-\theta_\alpha^{\beta_j}$なので、$l(\beta_j,\alpha)=l(\alpha,\beta_j)$であれば$l(\alpha,\beta_j)^2$に等しい。初期の運動に遷移して戻るというのは、初期の運動の安定性が高いためと考えることができるだろう。このように、測定の文脈$\underline{\beta}$における測定で、測定の影響が初期の運動に戻るくらい少ない場合は、初期の運動の位相$\mathrm{e}^{i\theta}$の違いは検出できず、$\{\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star \mid \theta\in\mathbb{R}\}$という集団が用意されて実験が行われていたとしてもそれを知ることはできない。

$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$に戻る場合、同時に$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star\to\beta_j^\star\to\mathrm{e}^{-i\pi/2}\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$という遷移が生じて、その符号付き確率は$l(\alpha,\beta_j)\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta)l(\beta_j,\alpha)\cos(\theta_{\beta_j}^\alpha-\theta-\pi/2)$である。更に、$\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star\to\mathrm{e}^{-i\pi/2}\beta_j^\star\to\mathrm{e}^{-i\pi/2}\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$という遷移が生じてその符号付き確率は$l(\alpha,\beta_j)\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta-\pi/2)l(\beta_j,\alpha)\cos(\theta_{\beta_j}^\alpha-\theta)$である。最後に$\mathrm{e}^{-i\pi/2}\mathrm{e}^{-i\theta}\alpha^\star$に遷移する符号付き確率はこれらの和になるので、

$$\begin{aligned}
& l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\alpha) \\
& \times\Big(\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta)\cos(\theta_{\beta_j}^{\alpha}-\theta-\pi/2) \\
& +\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta-\pi/2)\cos(\theta_{\beta_j}^{\alpha}-\theta)\Big) \\
= \;& l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\alpha) \\
& \times\Big(\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta)\sin(\theta_{\beta_j}^{\alpha}-\theta) \\
& +\sin(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta)\cos(\theta_{\beta_j}^{\alpha}-\theta)\Big) \\
= \;& l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\alpha)\sin(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta+\theta_{\beta_j}^{\alpha}-\theta) \\
= \;& l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\alpha)\sin(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha}) \\
= \;& l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\alpha)\sin(\theta_\alpha^{\beta_j}-\theta_\alpha^{\beta_j})=0
\end{aligned}$$

となる。従って、最後に$e^{-i\pi/2}e^{-i\theta}\alpha^\star$という運動に遷移する可能性は無く、すべて最後には$e^{-i\theta}\alpha^\star$という運動に戻る。従って、$\sum_{j=1}^n l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\alpha)=1$ でなければならない。

次に、$e^{-i\theta}\alpha^\star$ を測定の文脈$\underline{\beta}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ の環境に置いた後、測定の文脈$\underline{\gamma}=\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}$ で測定する場合を考えよう。

$e^{-i\theta}\alpha^\star\to\beta_j^\star\to\gamma_m^\star$ という遷移の符号付き確率は $\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta)\cos(\theta_{\beta_j}^{\gamma_m})l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\gamma_m^\star)$ であり、$e^{-i\theta}\alpha^\star\to e^{-i\pi/2}\beta_j^\star\to e^{-i\pi/2}e^{-i(\pi/2+\pi)}\gamma_m^\star$の符号付き確率は $\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta+\pi/2)\cos(\theta_{\beta_j}^{\gamma_m}+\pi/2+\pi)l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\gamma_m^\star)$ である。$e^{-i\theta}\alpha^\star$がβ_j経由で$\gamma_m^\star$ に遷移する符号付き確率は、これらの和であるので、$\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta+\theta_{\beta_j}^{\gamma_m})l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\gamma_m)$である。

また同時に、$e^{-i\theta}\alpha^\star\to\beta_j^\star\to e^{-i\pi/2}\gamma_m^\star$ という遷移の符号付き確率は $\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta)\cos(\theta_{\beta_j}^{\gamma_m}-\pi/2)l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\gamma_m^\star)$ であり、$e^{-i\theta}\alpha^\star\to e^{-i\pi/2}\beta_j^\star\to e^{-i\pi/2}\gamma_m^\star$の符号付き確率は $\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta-\pi/2)\cos(\theta_{\beta_j}^{\gamma_m})l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\gamma_m^\star)$ である。
$e^{-i\theta}\alpha^\star$ がβ_j経由で$e^{-i\pi/2}\gamma_m^\star$に遷移する符号付き確率はこれらの和であり、$\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta+\theta_{\beta_j}^{\gamma_m}-\pi/2)l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\gamma_m)$ である。

> $e^{-i\theta}\alpha^\star\to\gamma_m^\star$ という遷移の符号付き確率が、その遷移の経路が$\beta_1,\cdots,\beta_n$のどれかを経由するものだけに限られていたとしても変化しないと仮定しよう。

すなわち、それが、$e^{-i\theta}\alpha^\star\to\beta_j^\star\to\gamma_m^\star$という遷移の符号付き確率の$\beta_j$についての和に等しいとする。

$$\begin{aligned}
& \cos(\theta_\alpha^{\gamma_m}+\theta)l(\alpha,\gamma_m) \\
= & \sum_{j=1}^n\cos(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta+\theta_{\beta_j}^{\gamma_m})l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\gamma_m).
\end{aligned} \tag{25}$$

θで微分すると、次を得る。

$$\begin{aligned}
& \sin(\theta_\alpha^{\gamma_m}+\theta)l(\alpha,\gamma_m) \\
= & \sum_{j=1}^n\sin(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta+\theta_{\beta_j}^{\gamma_m})l(\alpha,\beta_j)l(\beta_j,\gamma_m).
\end{aligned} \tag{26}$$

これは、$e^{-i\theta}\alpha^\star\to e^{-i\pi/2}\gamma_m^\star$ という遷移の符号付き確率が、その遷移の経路が$\beta_1,\cdots,\beta_n$のどれかを経由するものだけに限られていたとしても変化しないということである。前者を実部、後者を虚部とすることで、次を得る。

$$\begin{aligned}
& e^{i(\theta_\alpha^{\gamma_m}+\theta)}l(\alpha,\gamma_m) \\
= & \sum_{j=1}^n e^{i(\theta_\alpha^{\beta_j}+\theta)}l(\alpha,\beta_j)e^{i\theta_{\beta_j}^{\gamma_m}}l(\beta_j,\gamma_m).
\end{aligned} \tag{27}$$

この式を馴染みのブラ・ケット記法で書いてみよう。

$$\langle\beta_k|\alpha\rangle:=l(\alpha,\beta_k)e^{i\theta_\alpha^{\beta_k}} \tag{28}$$

のように書く。すると、

$$e^{i\theta}\langle\gamma_m|\alpha\rangle=\sum_{j=1}^n e^{i\theta}\langle\beta_j|\alpha\rangle\langle\gamma_m|\beta_j\rangle. \tag{29}$$

これから、

$$|\alpha\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle\beta_j|\alpha\rangle|\beta_j\rangle \tag{30}$$

が得られ、(25) は量子力学的状態の重ね合わせを表している。

[参考文献]

[1] 内山　智, “機械論的量子論についての試論”, 北星学園大学短期大学部北星論集,**18**,1–12 (2020).

[2] 内山　智, “量子力学的確率と整合的な周期的軌道の変形について”, 北星学園大学短期大学部北星論集, **15**, 41–52 (2017).

[3] 内山　智, “正準交換関係の導出について”, 北星学園大学短期大学部北星論集,**16**,13–25 (2018).

[4] 内山　智, “正準交換関係のもう一つの導出方法について”, 北星学園大学短期大学部北星論集, **17**, 41–48 (2019).