北星学園大学経済学部北星論集第60巻第２号（通巻第79号）（2021年３月）・抜刷

【研究ノート】

経済学の嘶　微分を使う

増　田　辰　良

研究ノート

経済学の噺 微分を使う

増 田 辰 良

— えェー。歳をとって、いくつになっても兄弟姉妹というものはいいものですねェ。私にも上に姉が1人と2人の兄がいますがね。えェ、私は末っ子なんですよ。この歳になって振り返ってみると、幼い頃、ずい分と上の姉や兄貴には世話になりましたよ。はい〜。男ですからねェ。兄貴が買ってくる週刊誌を勝手に読んで、悪さを覚えたもんです。悪さと言っても、思春期の男の子なら誰でもやるあの悪さですけどねェ。他にも色々とあってェ、ほんと姉兄(きょうだい)には感謝してますよ。はい〜。でも、末っ子だとやはり下に弟か妹が欲しかったですねェ。とくに、妹なんかいれば、きっと可愛かったでしょうねェ。今日の噺はそんな兄と妹の真剣な噺ですから。皆さんにも勉強をしていただきますから。

高校3年生で翌春に大学受験をする妹が先に大学生になっている兄の部屋へ来て、あれこれ訊くんです。お兄ちゃんは経済学部へ進学をしたんですが、妹は本を読んだり、文章を作るのが大好きで、文学部へ進学したいんです。でも、まだ迷ってるみたいでねェ。そんな妹が大学での勉強や経済学部では、どんな勉強をしているのかを訊くんですねェ。お兄ちゃんも、このときばかりと兄貴風を吹かせるんです。はい〜。

妹：(トントン。ドアをノックする仕草) お兄ちゃん。いま、いい〜。

兄：おォ、いいぞ。どうした？

妹：お兄ちゃん、経済学部だよね。経済って何を勉強するの？

兄：いきなり、何だよ。ヤブからボウに。(笑) いや、ドアから妹かぁ。そういうことは一言では説明できんよ。

妹：じゃあ、大学と高校との勉強の仕方に違いはあるの？ お兄ちゃん、大学生になってからサークルとバイトばかりしてるけど……。

兄：大きなお世話だ。俺には俺の事情があるんだ。放っておいてくれ。で、どうした？

妹：ちょと進路で迷ってるのよね。

兄：大学かァ。講義時間は90分だし。単位を取る科目は自己申告しなきゃならないし。多くのことが自己責任だな。勉強の仕方については違いなんかないよ。仕方……、仕方……、いや姿勢だな。姿勢は同じだ。

妹：どう？

兄：例えば、いまは高校生だから教科書で習うことを予習したり、先生が教えてくれたことを家へ帰って来てから復習して、自分で理解するよう努力をしてるよな。

妹：うん、できるだけ毎日、頑張ってるけど。

兄：そうだよな。教えられることと、勉強することとは違うということだ。勉強は教えられたことを自分で理解するように努力、頑張ることだよ。教えられぱなしだ

キーワード：微分，限界概念，最大化行動

と、成長しないからさ。だから、高校であれ、大学であれ、自分から進んで勉強するのさ。今までの姿勢を大学でも続ければいいってこと。

妹：お兄ちゃん、かっこういい。

兄：と、ある教授は講義のときによくしゃべってるよ。アハッハッハッ。

妹：何だァ、受け売りかァ。褒（ほ）めて損した。

兄：でも、教授の言葉は正しいと思うよ。勉強は自分でするもんだぞ。こんなこと知ってるか？

妹：なあに？

兄：生徒と学生の違いだ。

妹：……？

兄：生徒っていう字は徒（いたずら）に生きるって書くよな。放っておくと、ちゃんとした人間にならないので、先生や周りの人たちからああしなさい、こうしなさいって指導をされるのが生徒だよ。学生は生きることを学ぶと書く。つまり自分はこれからの人生をどう生きるのか、を自分で考えるのが学生だよ。身分を証明する生徒手帳は学生証に変わるんだ。

妹：かっこいい！　って言いたいけど、止めた。また、受け売りでしょ。

兄：いや、これはオレの実感だ。参ったか！　アハッハッハッ。

妹：そんなことより、じゅあ、高校で習ったことは役に立つの？

兄：当たり前じゃないか。多くのことがすぐに役立つよ。でも、尚美（なおみ）は文学部を志望してるんだろ。他の学部なのでよくは知らないけど、文学部だと取り立てて準備することもないんじゃないのか？　一般的には国語や英語の授業の延長なんじゃないのか？　受けたい大学のホームページで学部のカリキュラムを見てごらん。

妹：私は完璧な文系なので、文学部へ進学したいのだけど……。でもね、就職のことを考えると、お兄ちゃんのように経済学部か法学部がいいかなって思うのよ。

兄：いや、どこの学部へ進学しても就職先は変わらないよ。例えば教育学部を卒業したからといって、皆が学校の教員になるわけじゃないし、銀行員になったり、IT系の仕事に就く人もいるから。自分の勉強したいことを優先すべきだぞ。尚美は本を読んだり、作文を書くのが好きなようだし、得意なんだろ？　文学部でいいんじゃないのか？

妹：まぁね。いまのところはね。ところで経済って何を勉強するのよ？

兄：おい、そんなに知りたいか？

妹：色々と聞いて、知ってから決めてもいいでしょ？

兄：そうか。よし、じゃあ、エッセンスを教えてやろう。エッセンス。この紙に書いて教えてやろう。いいかぁ。

妹：私が聴いて難しければ、いいよ、じゃましちゃ悪いし。

兄：そんなことはない。理解しようという気持ち、姿勢で聴けば、大丈夫だ。エッセンスだけだから。

妹：なんだか、難しいそう。

兄：数的処理ができれば簡単さ。

妹：数的処理？

兄：そうだ。数的処理をするので、数学の嫌いな学生にとっては、サイズの合わないトレーニング・シューズを履いて、フルマラソンを走っているようなもんだな。

妹：なに？　それ。

兄：苦痛（靴）～。

妹：(怒)もうー、ダジャレはいいから。

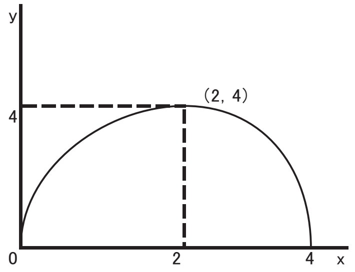
兄：ごめんごめん。じゃあ、経済学という学問の中でのミカンの賢い買い方を例にして説明するぞ。これなら今の知識ででも理解できるはずだから。いいかあ。ミカンの大好きな人がいるとする。ミカンを食べる個数とおいしさ度との間には、次のような2次関数の関係があるとしよ

う。2次関数は数学 I で習ったよな。

$$y=-x^2+4x$$

x がミカンの個数、y がおいしさ度だとする。これを**グラフ１**に描くと、こうなる。

グラフ　1



妹：うん、習ったよ。

兄：じゃあ、この問題は解けるはずだ。経済学はこの x と y の組合せを考えるんだ。つまり、ミカンを何個食べれば、おいしさ度が最大になるのかって。この式をだなぁ、習って知っている2次関数の軸と頂点の公式に当てはめて解く。a,b,c を定数とすると、2次関数の一般形は $y=ax^2+bx+c$ で、頂点はこうだったよな。

$$\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

妹：うん、そんな感じだったかな。

兄：おい、もう記憶にないのか？　大学入学共通テストの対象範囲だろ？　これに当てはめて答えを出してごらん。

妹：やらせるの？

兄：できるはずだぞ。ついこの前、習ったはずだから。

妹：分かったわよ。やるわよ。こうだから、$x=2$、$y=4$ かな？　はい。

兄：正解だ。でも、この公式をずーーーっと覚えておくことは大変だよな。他にも公式がたくさんあるから。

妹：そうなんだよねェ。数学や物理は公式が多くて……。公式を導くところまで戻れないし、自分で考えて作ったものでもないしね。

兄：そうだろ。大学ではこんな公式を使わないで、微分を使って解くんだ。数学 II で習っただろ。たとえ文系であっても。

妹：うん、習ったよ。

兄：じゃあ、できるよな。

妹：微分とか積分、サイン、コサイン、タンゼントなんか習って何になるの？

兄：♪おいらにゃあ、おいらの夢がある♪

妹：何よ、それ。

兄：高石ともやの「受験生ブルース」だァ。知らないだろ！　アハッハッハッ。

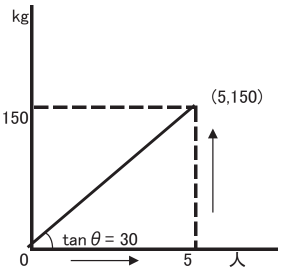
妹：そんなことより、苦手だから……。解く前に復習させて、もう一度、教えてよ、微分を。

兄：おい、大学入学共通テストに出るんじゃないのか？　大丈夫か？　しょうがないなァ。分かったよ。基礎から教えてやるよ。微分を理解しようと思えば、まず平均値から説明する必要がある。いま、5人の幼児が居て、体重を足すと150kg だった。1人平均の体重はいくらですか？

妹：30kg。

兄：そうだな。これをよこ軸に人数、たて軸に kg をとって、こう**グラフ２**で表現すると、30kg は5人分（ぶん）の150kg を計算したよな。平均値は原点と、この座標（50、150）とを結んでできる、ここの角度、傾きを測ることになってる、って解かるか？　これ分のこれでタンゼント θ だな。

グラフ　2

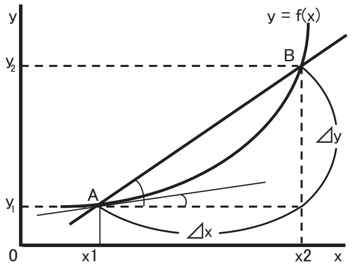


妹：うん、そうね。ここの傾きよね。解かるよ。

兄：そうか。じゃあ、次に平均変化率という

のを考える。これは字のごとく変化した部分の平均値のことだ。これは数学IIに出ているからな。完全な復習だぞ。ここに**グラフ３**を描く。いま、こんな関数 $y=f(x)$を考える。x_1のとき、yは $y_1=f(x_1)$、x が増えて x_2になると、y は $y_2=f(x_2)$ になる。そうだな。

グラフ　3



妹：うん。

兄：x が変化した幅をこんな記号⊿で表現するんだ。デルタって読むんだ。幅だから、⊿x と書く。x が変化すると、y も y_1から y_2へ変化したので、この幅を⊿yと書く。

妹：デルタだから三角地帯かと思っちゃたよ。

兄：さすが、文系だな、と褒めてやりたいが……。

妹：でも、三角形に近い形をしてるね。

兄：んんっ。変化した部分の平均値だから $\frac{⊿y}{⊿x}$ を計算すればいいんだ。要するに、線分 AB の点 A における傾きを測ってるよな。

妹：あぁ、そうか、点 A を原点と考えればいいのね。

兄：そのとおり。これを使って微分を定義するのさ。微分っていうのは、いま増やした⊿x を限りなく、ゼロにして……、だから点 A にくるな。点 A でグラフに接線を引いて、その角度を求めることなんだよ。記号で書くとこうなる。

$$y' = \lim_{⊿x \to 0} \frac{⊿y}{⊿x}$$

妹：あぁ、思い出した。これを使うのかァ。

兄：そうだよ。これで十分さ。この傾きは経済学で表現すると、よこ軸の経済変数 x が変化したとき⊿x、それがたて軸の別の経済変数 y にどの程度の影響⊿y を与えるのか、を測っているのさ。具体的な関数で演算ができればいいから。やってみるからな。さっきの関数 $y=-x^2+4x$ を x で微分して、ゼロとおくのさ。こうやって。

$$y' = \frac{⊿y}{⊿x} = -2x+4=0$$

$$x=2$$

これを元の式に代入すると、たて軸の y の値が、$y=4$、こう出るな。これだと簡単に答えが見つけられただろ。

妹：ちょと待って。なぜ、ゼロっておくの。

兄：さっき傾きを求めるって言ったよな。そして、おいしさ度が最大になるときの x と y の組合せを求めるわけだから、グラフの山のてっぺんの傾きを求めることになるよな。山のてっぺんは、傾きはないよな、ゼロだよな。ときどきあるっていうヤツがいて、説明に困るときがあるけど、お前は大丈夫だな？

妹：うん。そっかぁ。それでゼロとおいたのか。解かった。もう1つ訊いてもいい。

兄：何だ？

妹：微分をしたとき、なぜワイダッシュって書くの？

兄：あぁ、これかァ。数学の先生から聞かなかったのか？　これは微分記号でダッシュって読めば、イギリス式だよ。別の読み方はプライムって言うんだ。アメリカ式だ。今の経済学はアメリカから入ってきたものが多いので、教授はプライムと呼んでいるよ。どっちでもいいから。

妹：うん、解かった。

兄：話しを戻すぞ。微分の意味は $\frac{⊿y}{⊿x}$ で表現

されているので、こう書いてあげれば一層理解し易いかもしれないな。

妹：微分を習うと簡単に答えが出るんだね。

兄：そうだろ。でも、経済学はこんな簡単じゃあないぞ。

妹：どこが？

兄：いまの話はミカンとおいしさ度だけだったけど、ミカンを買うときにお金が必要だろ。そのお金に限度があれば、今度はその使えるお金の範囲内でおいしさ度が一番大きくなる個数を求めなければならないんだ。そして専門用語も出てくるから。

妹：どんな？

兄：おいしさ度は効用っていうんだ。いわゆる精神的な満足度のことだよ。英語で *Utility* と書くので、*U* と略している。それから使えるお金は例えば、*M*、これは *Money* の *M* だな。ミカン1個の価格は *P*、*Price* の *P* だよ。それからミカンの個数は *Q* と書くんだ。これも英語の *Quantity* の頭文字だ。尚美は英語も得意だから、解かるだろ。

妹：単語だからね。今度はどう解くの？

兄：慌てるなって。教えてやるから。いいかァ。この関係を式で表現するとこう書ける。

$$U = f(Q) \quad \cdots ①$$

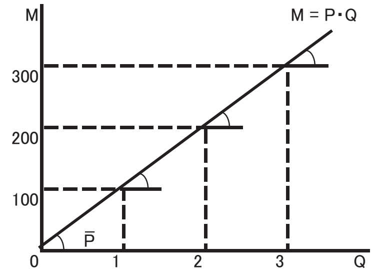
$$M = \overline{P} \cdot Q \quad \cdots ②$$

①式は効用関数っていうんだ。スモールエフは *function*、関数の頭文字だぞ。②式の左辺は持っているお金の額、右辺は支出額だな。*P* の頭に棒が付いているけど、これは経済学の約束事で、この変数は一定のまま動かないっていう意味だ。バーと読む。ミカンをいくら買っても1個当りの価格は100円で変わりませんということだ。

妹：なるほどね。スーパーで売ってるものの価格も頻繁には変わらないよね。

兄：そう。この2つの式をグラフに描くぞ。簡単な②式から描くと、こうなる（**グラフ4参照**）。

グラフ　4



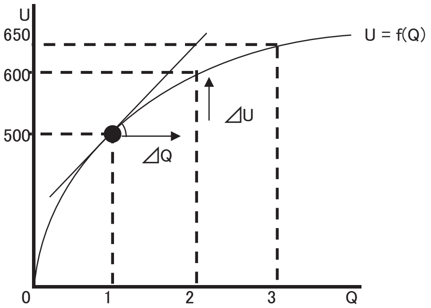
これは1次関数だな。*Q* が増えると、これを買うのに必要なお金 *M* も増えるという関係になってる。*Q* と *M* は比例の関係にあるよな。1個買えば、100円。2個買えば200円。3個買えば300円だな。

妹：$y=2x$ と同じね。

兄：そうだ。次の①式がちょっと大変だ。グラフにすると、さっきの2次関数の右上がりの部分を使うんだ。具体的には平方根の関数、$U=\sqrt{Q}$ になる（**グラフ5参照**）。よこ軸からグラフまでの高さは全部効用っていう。ミカンを食べて胃袋が詰まっていく感じかな。いま、この効用が測れる、計算できるとすると、1個目のときの全部効用500と2個目のときのその600を引き算したものを限界効用って呼ぶんだ。後ろから前を引けばいいから。この限界は体力がなくなるという意味ではなくて、数学の微分のことだぞ。だから〜、ここで使う限界は *limit* ではなくマージナル（*marginal*）って表現するんだ。意味は追加的ってことだ。よこ軸を1つ増やすと $\varDelta Q$ だな、するとたて軸 *U* はいくら増えたり減ったりするか、という意味だよ。だからミカンを1個追加して食べると、おいしさ度はどの程度増えたり減ったりするのか、ということ

だ。記号では$\frac{\triangle U}{\triangle Q}$と書くんだ。さっきの微分の定義と同じだな。微分は傾きを求めることだったので、このグラフの傾きはプラスだよな。

グラフ 5



妹：解かるわ。さっきのグラフと同じようにQが増えるとUも増えてるもの。でも、待って。増え方は減ってるように見えるけど。いいの？

兄：いいところに気づいたな。お前、エエ・センスしてまんなァ。

妹：何？ それ。

兄：関西弁だ。エッセンスを教えているので〝いい〟センスと掛けたんだ。

妹：真剣に聴いてるんだから。もうー。

兄：ごめんごめん。これから説明しようと思っていたことだ。ミカンを1個、2個、3個と食べ続けると、確かに効用は増えるけど、増え方は減るよな。解かるか？

妹：当たり前でしょ。どんなに好きでも次から次へと食べ続ければ、しだいにおいしくなくなるもの。

兄：そう、そうなんだ。それを限界効用が減るので、限界効用逓減(ていげん)の法則って呼んでるんだ。どんなものの消費にもあてはまるだろ。

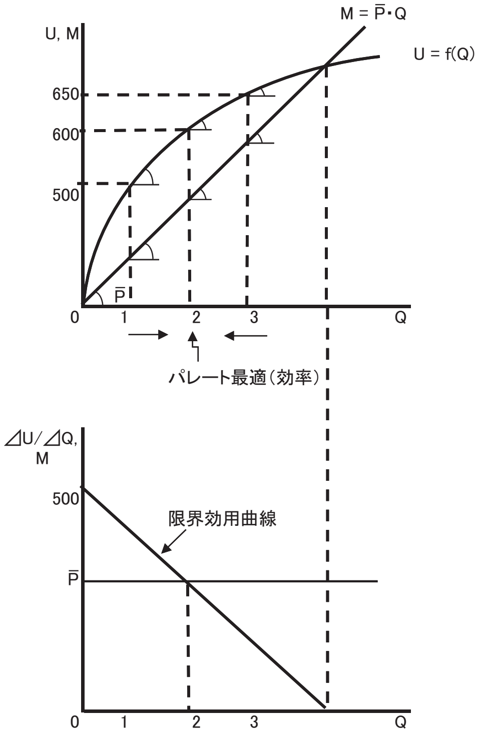
妹：テ・イ・ゲ・ン？

兄：あぁ、そうか。あまり聞きなれない言葉だよな。逓減っていうのはこんな漢字で、意味は規則正しく減るということだ。例えば、10、9、5、1。これは単純に減る。10、9、8、7、6。これは規則正しく1つだけ減ってるだろ。これを言うんだァ、逓減って。

妹：なるほど、しだいに規則正しく減っていくことね。

兄：そうだ。じゃあ、結論にいくぞ。2つのグラフを同じグラフ上に描くから（**グラフ6**参照）。

グラフ 6



微分を使うから、2つのグラフの傾きに注目するんだ。いいか？ 簡単な②式からいくぞ。

$$M=\overline{P}\cdot Q$$

これをQで微分すると、こうなる。

$$M'=\frac{\triangle(\overline{P}\cdot Q)}{\triangle Q}=\overline{P}$$

もう1個余分にミカンQを買うとき、余分に追加して支払う金額は一定の$\overline{P}$だよな。100円だったよな。

妹：ちょと解からないわ。なぜ、$\overline{P}$ だけが残るのか？

兄：それは定数だから残るのさ。(妹を睨み) おい、数学Ⅱでこんな公式を見たはずだぞ。

$$y = ax^k$$

これを x で微分すると、$y' = akx^{k-1}$ となる。a は定数だからそのまま残るのさ。

妹：そうだったけ？

兄：そうだよ。おい、しっかりしろよ。忘れるのが早すぎるぞ。次に、$U = f(Q)$ を微分すると、こうなって、これはグラフ上のどこかの座標における傾きで限界効用だったな。

$$U' = \frac{\triangle f(Q)}{\triangle Q}$$

そこで、グラフのよこ軸の Q が1のときの2つのグラフの傾きを比べてごらん。

妹：上にある U の方が大きいよ。

兄：そうだろ。ミカンを1個買って食べるときの、限界効用がそれを得るために支払う金額よりも大きいということだ。そんなとき、どうする？　ミカンが大好きな人であれば……。

妹：もう1個追加して買うよ。

兄：そうだろ。じゃあミカンが3個のときの傾きを比べてごらん。

妹：今度は下にある直線の傾きが大きいわね。

兄：ということは3個食べるときの効用よりも支払う金額の方が大きいと考えればいいんだ。

妹：そうね。

兄：そんなときどうする？

妹：もちろん、買って食べないわよ。損した気分になるもの。

兄：そのとおり。そうすると1個のときはもっと買うし、3個のときは減らすわけだ。1個100円は変わらないままなので、結局2つのグラフの傾きが等しくなるところで買って食べることを決めるんだ。そのとき効用が最大になっているのさ。2つのグラフの幅を見てごらん。

妹：じゃあ、この場合だと答えは2個になるのね。だって、これとこれが等しくなるんでしょ。

$$U' = \frac{\triangle f(Q)}{\triangle Q} = \overline{P}$$

兄：正解だよ。すごいじゃないか。エエ・センスしてるよ。この2個のことをパレート最適とか効率って呼ぶんだ。パレートは大昔の学者の名前で、それにちなんでこう呼んでいるそうだ。この式は言い方を換えると、$\overline{P}$ は1個余分に買うときに支出するお金なので、買い手にとってはデメリットだよな。お金が財布から出ていくのは嫌だよな。この場合、微分して計算したので、これを限界デメリットと呼んでもいい。$U' = \frac{\triangle f(Q)}{\triangle Q}$ は1個余分に食べたときの限界効用、つまり限界メリットだよな。追加的なおいしさ度のことだった。だから、この場合、ミカンの買い手は限界デメリットと限界メリットが等しくなるところで個数を決めれば、効用は最大になる、と考えるのさ。事実、グラフはそうなっているよな。よく見ろ、解かるか？

妹：何となくね。でも、これって冷静に考えれば、普段、こういう物の買い方、お金の使い方をしてるよね。うまくいかないけど。フッフッフッ。

兄：そうだよ。当たり前だけど、経済学は普段、人間が経験していることを記号やグラフで表現するのさ。学問だからね。紙の上で現実の経済活動を表現し直して色々と経済問題を考えるのさ。理論模型（モデル）ともいう。経済学では、こういう金の使い方を合理的に行動した、と考えるんだ。そして経済学の中の人間はつねにこんな行動をすることが前提にさ

れている。

妹：ふ〜〜ん。なるほど。お兄ちゃん、さっきの平方根の関数だっけ、文学部へ進学してしまうと、きっとそんな関数はもう2度と見ないと思うの。たぶん、数学 III で習ったんでしょ。

兄：そうだ。きっとお前は見ないな。

妹：じゃあ、傾きが大きくなってるとか、小さくなってるとか、を微分で証明して見せてよ。

兄：あぁ、簡単だ。微分ができればすぐに理解できる。

妹：早くー、やってみてよ。

兄：よし、いいか。この関数は、こうだよな。ルートはこう書き換えれるよな。

$$U=\sqrt{Q}=Q^{\frac{1}{2}}$$

妹：うん、これは知ってるよ。

兄：後は、微分をすればいいんだ。Q のみの1変数だから簡単さ。

$$U'=\frac{\varDelta f(Q)}{\varDelta Q}=\frac{1}{2}Q^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{Q}}>0$$

この符号はプラスだよな。プラスだから傾きもプラスということだ。

妹：えっと、マイナス2分の1だから、逆数で……、そうね。正しいね。

兄：よし、これをもう1回、微分するんだ。

$$U''=\frac{\varDelta}{\varDelta Q}\left[\frac{\varDelta f(Q)}{\varDelta Q}\right]=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)Q^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{Q^3}}<0$$

これは頭にマイナスが付くから、値はマイナスになるな。

妹：うん、なるね。

兄：関数を2回、微分すると、そのグラフの傾きが大きくなっていくのか、小さくなっていくのか、が判るんだ。この場合だと、マイナスだから小さくなっているんだ。どうだあ！　微分が使えると、いい気分になれるだろ。

妹：なるほどねェ。経済学を勉強するには数学が得意だと楽そうね。いま気づいたけど、お兄ちゃん、数学を使うと便利だし、表現がとてもきれいだね。

兄：あぁ、〝経済学はアートだ〟って表現した経済学者もいたそうだよ。そんなにきれいか？

妹：文学の大好きな私には論理的な構成がとても美文に感じられるもの。

兄：美文と微分か？　お前もやるじゃないか。アハッハッハッ。

妹：でも、数学 II で習ったことが、こんなに役に立つのなら、進路を変えようかなァ。

兄：おいおい、経済学はこんなに簡単じゃあないぞ。買いたいものが2つあるときなんか、もっと大変だぞ。偏微分とか全微分とかも使うんだ。グラフもややこしくなるし。

妹：でも、（笑）心が大きく経済学部の方へプラスに傾いてきちゃった。

兄：(ニッと笑って)微分を復習したからな。

｛補論｝企業の最適化問題

1．利潤の最大化行動

高校数学 II で学習した微分を使えば、企業が最大にする利潤(π)とそのときの生産量(x)の組み合わせを簡単に求めることができる。ある企業の売上（収入）[$R(x)$] と総費用 [$C(x)$] を、次のように定義する。$y\geq 0$。x は生産量で $x\geq 0$ とする。このとき、利潤を最大にする x の値と利潤(π)を求めてみる。

$R(x);y=4x$

$C(x);y=\frac{1}{2}x^2$

解き方①　利潤(π)は次のように x の関数で表現できる。これを利潤関数という。

$$\pi=R(x)-C(x)$$

表を作り数値を入れると、$x=4$で利潤(π)は8で最大になることが分かる（**表1**参照）。

表 1

x	0	1	2	3	4	5
$R(x)$	0	4	8	12	16	20
$C(x)$	0	0.5	2	4.5	8	12.5
π	0	3.5	6	7.5	8	7.5

解き方②　利潤関数をグラフに描く。利潤は2つのグラフのたての幅に表れている（**グラフ7**参照）。

$$\pi = R(x) - C(x)$$

これを x で微分して、ゼロとおく。

$$\pi' = \frac{\triangle R(x)}{\triangle x} - \frac{\triangle R(C)}{\triangle x} = 0$$

$$\frac{\triangle R(x)}{\triangle x} = \frac{\triangle R(C)}{\triangle x}$$

ここで、$\dfrac{\triangle R(x)}{\triangle x}$ ；限界収入である。

$\dfrac{\triangle R(C)}{\triangle x}$ ；限界費用である。

具体的に、微分をする。

$R(x)$;$y=4x$。$y'=4$。これが限界収入である。

$C(x)$;$y=\dfrac{1}{2}x^2$。$y'=x$。これが限界費用である。

生産量 x において、$y'=4=x$ となり、限界収入と限界費用は等しくなる。

あるいは、次の2次関数を微分する。

$$\pi = 4x - \frac{1}{2}x^2 \quad \cdots ①$$

$$\pi' = 4 - \frac{1}{2}(2)x^{2-1} = 0$$

$$x=4$$

この $x=4$を①式に代入すると、$y=8$となる。**グラフ7**の $x=4$における、たて軸の幅8（=16−8）で表現されている。

もし、微分を知らなければ、2次方程式の軸と頂点を求める公式を使う。

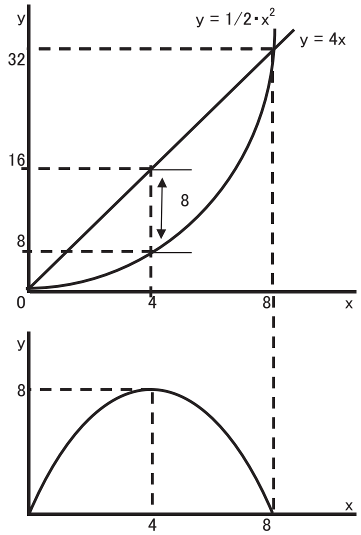
$$y=ax^2+bx+c、(a,b,c \neq 0)$$

軸と頂点の公式は、

$$\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

である。

グラフ　7



2．企業の最適な労働需要

競争市場にいる企業が利潤を最大にするときの労働需要について考える。競争市場では価格と名が付くものはすべて一定、あるいは与えられる（プライス・テイカーと呼ばれている）。その価格のもとで企業は利潤を最大にするときの労働需要を決める。

ここで、$\overline{P}$ を生産物の市場価格、Y を生産量（Y は *Yield* の頭文字である）、$\overline{w}$ は労働サービスの価格（名目賃金率、w は *wage* の頭文字である）、L を労働サービス量（L は *Labour* の頭文字である）、C_0 を固定費用とする。

企業は労働者のみを投入して Y を生産する。利潤関数（π）と制約条件 (*s.t*) を次のよ

うに定義する。②式のもとで、①式を解くことになる。

$$\text{Maximize}\quad \pi=\bar{p}\cdot Y-[\bar{w}\cdot L-C_0]\cdots ①$$

$$\text{subject to}\quad Y=f(L)\qquad\cdots ②$$

最初に、微分を使って解く。$\bar{p}$ と $\bar{w}$ のバーは省略する。②式の生産関数を①式に代入する。変数は L のみとなる。

$$\pi=p\cdot f(L)-[w\cdot L-C_0]$$

$$\pi'=\frac{\triangle\pi}{\triangle L}=p\cdot\frac{\triangle f(L)}{\triangle L}-w=0$$

$$\frac{w}{p}=\frac{\triangle f(L)}{\triangle L}\quad\cdots ③$$

この③式が答えである。ここで、$\frac{w}{p}$は実質賃金率であり、$\frac{\triangle f(L)}{\triangle L}$ は労働の限界生産性（*Marginal productivity of labour = MPL*）である。つまり、③式は一定の実質賃金率に労働の限界生産性が等しくなるよう労働投入量を決めれば、利潤は最大になることを意味している。

③式をたすき掛けすると金額で表現できる。

$$p\cdot\triangle f(L)=w\cdot\triangle L$$

左辺は限界生産物価値である。これはもう1人、追加して労働者を投入すると、その人が生産額（売上額の増分）に貢献してくれる金額を意味している。右辺は限界労働費用である。これはもう1人、追加して労働者を投入すると、その人に支払う賃金費用の増分を意味している。

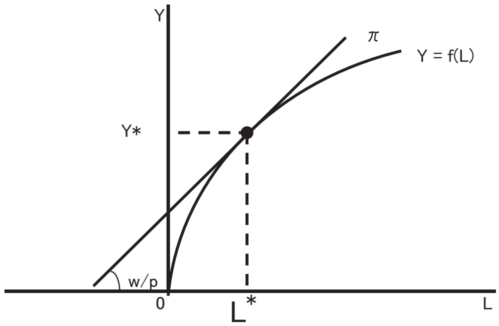
次に、①式と②式をグラフに描いて同じ結論になることをみる（**グラフ8**参照）。

①式より、

$$Y=\frac{w}{p}\cdot L+\left(\frac{\pi}{p}+\frac{C_0}{p}\right)$$

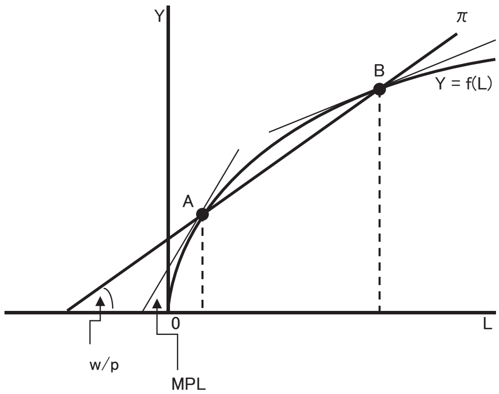
となる。たて軸に Y、よこ軸に L をとると、これは傾きが$\frac{w}{p}$、たて軸切片が$\left(\frac{\pi}{p}+\frac{C_0}{p}\right)$の一次関数である。企業が必要とする π が大きくなると上へ移動する。②式は、一般的に平方根の関数を想定し、労働の限界生産性は逓減する、と考える。一定の規模しかない工場に労働者を追加的に投入していくと、その生産性はしだいに下がるということである。

グラフ　8



利潤が最大になるのは、利潤線の傾き$\frac{w}{p}$と生産関数の傾き $\frac{\triangle f(L)}{\triangle L}$ が一致するところ $\left(L^*,Y^*\right)$ である。次になぜ、ここで決まるのかを説明する（**グラフ9**参照）。

グラフ　9



グラフ9の点 A では、

$$\frac{\triangle f(L)}{\triangle L}=MPL>\frac{w}{p}$$

となっている。あるいは、

$$p\cdot\triangle f(L)>w\cdot\triangle L$$

である。この式の意味はもう1人だけ追加して労働者を投入すれば、その人が生み出してくれる追加的な生産額（売上額の増分）がその人に支払う名目賃金額の増分を上回るということである。限界利潤は、

$$p\cdot\triangle f(L)-w\cdot\triangle L>0$$

だけ、増える。企業は労働投入量を増やす。

一方、点Bでは、

$$\frac{\triangle f(L)}{\triangle L}=MPL<\frac{w}{p}$$

となっている。あるいは、

$$p\cdot\triangle f(L)<w\cdot\triangle L$$

である。この式の意味はもう1人だけ追加して労働者を投入すれば、その人が生み出してくれる追加的な生産額（売上額の増分）よりもその人に支払う名目賃金の増分が上回るということである。限界利潤は、

$$p\cdot\triangle f(L)-w\cdot\triangle L<0$$

だけ、減る。企業は労働投入量を減らす。

つまり、点Aでは労働投入量を増やし、点Bでは減らすという調整をする。その調整がいきついた先では、

$$\frac{\triangle f(L)}{\triangle L}=MPL=\frac{w}{p}$$

$$p\cdot\triangle f(L)=w\cdot\triangle L$$

$$p\cdot\triangle f(L)-w\cdot\triangle L=0$$

となる。限界利潤がもう増えないときの $\left(L^*,Y^*\right)$ をパレート最適（効率）な労働投入量と生産量との組合せと呼ぶ。

（了）

付記

本稿は経済学の中で「微分」がどう使われるのか、を説明したものです。何か新しい考え方を提示するものではありません。ご寛恕、願います。