北星学園大学短期大学部北星論集第18号（通巻第56号）（2020年３月）・抜刷

【研究ノート】

機械論的量子論についての試論

内　山　　　智

研究ノート

機械論的量子論についての試論

内　山　　　智
Satoshi UCHIYAMA

目　次

［Abstract］
An Essay on a Mechanical Quantum Theory

A mathematical model of a classical mechanical system that reproduces quantum-mechanical probabilities is considered in this mechanical quantum theory. The basic idea is that a quantum-mechanical state corresponds to a periodic trajectory in a classical-mechanical phase space. In this model, the quantities that correspond to amplitudes of a wave function are considered as functionals of the corresponding periodic trajectory. An observable is realized as a linear mapping of a linear space spanned by these functionals. The linear mapping is induced from an infinitesimal transformation of a periodic trajectory; the infinitesimal transformation of a periodic trajectory is induced from the Hamiltonian vector field with the observable physical quantity. A condition that is sufficient for preserving the Lie algebra generated by classical physical quantities is found to be preserved in this realization. Based on the interpretation that superposition of quantum-mechanical states is necessary only for consideration, the fact that the superposition expression in the bra-ket notation is derived from the requirement that the number of prepared objects coincides with one of the objects for which measurement values are obtained is shown.

1．はじめに

量子力学のコペンハーゲン解釈では，量子状態を単一の対象の状態と考えるため，確率的にバラついた物理量の観測結果が得られるのは，対象の状態に対する無知が原因ではなく，観測によって物理量の値が生成されると考えられている。それは，観測前の物理量に言及することが無意味だという表現に現れている。しかし，測定によって対象の状態が変化させられる様子は人間の無知が原因で知ることはできないが，神の視点からならその様子を追跡できるという思想は，測定される物理量は生成されるのではなく存在するという，すなわち隠れた変数が存在するという考えに到達する。追跡可能な測定過程によって量子現象を記述する理論は，機械論的である。本稿では，機械論的量子論の輪郭を描いてみた

キーワード：量子力学的確率，隠れた変数，周期的軌道，正準交換関係
Key words：Quantum-mechanical Probability, Hidden Variables, Periodic Trajectories, Canonical Commutation Relations

い。その基本的なアイディアは，量子状態は周期的な軌道をなす状態であり，測定においては常にその軌道上に分布するように状態が用意されるということである。量子力学的状態が周期的軌道と関係するというのは，前期量子論のような原子の安定性だけではなく，干渉現象の説明にもなる可能性が［1］で考察された。

この方針に従って量子力学において本質的な正準交換関係の導出の条件が［2，3］において考察されたが，本稿ではそれの一層の洗練化も試みられる。

2．周期的軌道と Lie 代数

拙稿［2，3］においては，周期的軌道上に分布する状態のアンサンブルを量子状態と解釈して，古典的物理量が線形写像にどのように対応づけられるかを考察し，それらの線形写像が正準交換関係に従うことや Lie 代数を保存することを示した。この節では，周期的軌道の復元可能な変形で確率的に振る舞う軌道の変化を，変形の出発点と終着点の確率的な振る舞いとして記述することで，Lie 代数を保存するための別の条件を見つけることにしよう。

2.1. 周期的軌道の連続的な変形

対象を取り巻く環境と相互作用した結果，周期的軌道を描く物理的な対象である系 Σ を考え，この物理的な対象の位相空間を Q で表わす。Q はシンプレクティック多様体であるとする。この周期的軌道は，状態の本当の時間発展を意味するのではなく，測定実験において用意される状態をパラメーター s で区別したものと解釈されるべきものである。何度も繰り返される実験において，パラメーター s はエルゴード的に実験結果の統計的性質を記述するパラメーターと想定されている。

Q 内の周期的軌道 α について，その周期を T_α とすると，パラメーター s の単調増加関数 ϕ_α によって，α の $U(1)$-リフト $\alpha\star$ が次によって定義される［1］。

$$\alpha\star(s):=(\alpha(s), \mathrm{e}^{i\phi_\alpha(s)}), \quad s\in[0, T_\alpha]. \tag{1}$$

ϕ_α は α 内のいくつかの状態のみが用意されるという状況を表現するために導入されたもので，$\mathrm{e}^{i\phi_\alpha(s)}=1$ となる s のときの状態 $\alpha(s)$ が用意されているということを表現している。このような s は複数個あり得るので，そういった状態の集合を $U(1)$-リフト $\alpha\star$ は表すと，解釈される。もっと正確に言うと，

$$\{\alpha(s)\in Q\,|\,\mathrm{e}^{i\phi_\alpha(s)}=1, s\in[0, T_\alpha]\} \tag{2}$$

という状態の集合を $U(1)$-リフト $\alpha\star$ は表す。α が変形されたとき，その $U(1)$-リフトと元の $\alpha\star$ の交点，すなわち位相 ϕ_α と一致する点があれば，その点を介してもとの $\alpha\star$ に戻ることができるので，**復元可能な変形**と言える。

測定に際しては，$U(1)$-リフト $\alpha\star$ が表す状態の集合の各要素 $\alpha(s)$ だけが実現されるというわけではなく，別の $\alpha(s')$ も用意されるが，そこでの位相は0ではなく，$\alpha\star$ の位相に一致しているものだけであると想定している。α の属さない測定の文脈 $\underline{\beta}$［1，2］において，確率的にバラついた測定結果が得られるのは，このパラメーター s のずれによるものと解釈されるからである。

拙稿［2］では，ϕ_α が満たすべき条件は間接的にしか示されなかったので，［3］ではより具体的な形が与えられた。さらに以下で導入するような，アド・ホックではあるが，具体的な形に絞って考察を進めたい。

記述を簡単にするための記号を導入しよう。$\rho:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は非負の可積分関数で，

$$\int_{\mathbb{R}} du\ \rho(u)=1 \tag{3}$$

を満たすものとする。今後，記述を簡単にす

るために，Q 上の関数 C の α に沿った ρ による平均を

$$\overline{C}[\alpha]:=\int du\ \rho(u)C(\alpha(u)) \qquad (4)$$

のようにしばしば書く。以降の考察では，ρ は，

$$\rho(u)=\frac{1}{T_\alpha}[\chi_{[0,\infty)}(u)-\chi_{[0,\infty)}(u-T_\alpha)] \quad (5)$$

というものに限られる。

滑らかな関数 $A:Q\to\mathbb{R}$ のハミルトンニアン・ヴェクトル場を X_A で表す。周期的軌道 α を，ある $A:Q\to\mathbb{R}$ が存在して $\alpha(0)\in Q$ として，

$$\alpha(s):=\mathrm{Exp}sX_A(\alpha(0)) \qquad (6)$$

と書けるものとする。その周期を T_α と書くことにする。すなわち，$\alpha(T_\alpha)=\alpha(0)$ である。一般性を失うことなく，$A>0$ としてよい［2］。

λ を正の実数として

$$\phi_\alpha(s):=\lambda s\int du\ \rho(u)\ A(\alpha(u))+\phi_\alpha(0) \qquad (7)$$

と定義しよう。

$A(\alpha(s))=A(\alpha(0))$ なので，$\overline{A}[\alpha]=A(\alpha(0))$ である。従って，

$$\frac{d\phi_\alpha}{ds}=\lambda\overline{A}[\alpha]=\lambda A(\alpha(0))>0 \qquad (8)$$

となって，ϕ_α が単調増加関数であるという条件［1］を満たす。

$F:Q\to\mathbb{R}$ と，$G:Q\to\mathbb{R}$ を滑らかな関数とする。これらのハミルトニアン・ヴェクトル場が生成する写像による，t，v をパラメーターとする次の連続的な α の変形を $\alpha_{t,v}$ で表す：

$$\alpha_{t,v}(s):=\mathrm{Exp}tX_F\circ\mathrm{Exp}vX_G(\alpha(s)) \qquad (9)$$

$\alpha_{t,v}(T_\alpha)=\alpha_{t,v}(0)$ であるので，$\alpha_{t,v}$ の周期は変化せずに T_α のままである；$T_{\alpha_{t,v}}=T_\alpha$。

$$A_{t,v}:=A\circ\mathrm{Exp}(-v)X_G\circ\mathrm{Exp}(-t)X_F \quad (10)$$

と置こう。

一般に $\alpha_{t,v}(s)\neq\mathrm{Exp}sX_{A_{t,v}}(\alpha_{t,v}(0))$ ではあるが

$$\phi_{\alpha_{t,v}}(s):=\lambda s\overline{A_{t,v}}[\alpha_{t,v}]+\phi_{\alpha_{t,v}}(0) \qquad (11)$$

と定義しよう。$\overline{A_{t,v}}[\alpha_{t,v}]=\overline{A}[\alpha]$ であるので，$d\phi_{\alpha_{t,v}}(s)/ds>0$ という条件［1］を満たす。$s=0$ での初期値を，

$$\phi_{\alpha_{t,v}}(0):=-\lambda\int du\ \rho(u)uA(\alpha_{t,v}(u)) \quad (12)$$

と定義しよう。

物理量 $B:Q\to\mathbb{R}$ の測定の文脈 $\underline{\beta}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ において［1，2］，$\alpha_{t,v}$ から β_j に分岐するとき，$\alpha_{t,v}(s^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}})$ で $\alpha_{t,v}$ から離れ，$\beta_j(f^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}})$ で β_j に到達するとしよう。この遷移における位相のずれは，$\phi_{\beta_j}(f^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}})-\phi_{\alpha_{t,v}}(s^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}})$ である。この $\alpha_{t,v}$ から β_j への遷移は確率的にバラつくので，$s^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}}$ と $f^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}}$ は確率変数となる。この位相のずれの平均を

$$\theta^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}}:=\mathbf{E}(\phi_{\beta_j}(f^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}})-\phi_{\alpha_{t,v}}(s^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}})) \qquad (13)$$

で表そう。すると，(11)と(12)より

$$\begin{aligned}&\theta^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}}\\&=\lambda\overline{B}[\beta_j]\mathbf{E}(f^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}})-\lambda\overline{A}[\alpha]\mathbf{E}(s^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}})\\&\quad-\lambda\int du\ \rho_{\beta_j}(u)\ uB(\beta_j(u))\\&\quad+\lambda\int du\ \rho(u)\ uA(\alpha_{t,v}(u))\end{aligned} \qquad (14)$$

となる。これから，

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\theta^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}}}{\partial t}\\&=\lambda\overline{B}[\beta_j]\frac{\partial\mathbf{E}(f^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}})}{\partial t}-\lambda\overline{A}[\alpha]\frac{\partial\mathbf{E}(s^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}})}{\partial t}\\&\quad+\lambda\int du\ \rho(u)u\{F,A\}(\alpha_{t,v}(u))\end{aligned} \qquad (15)$$

を得る。

$$\{F,A\}(\alpha(u))=-\{A,F\}(\alpha(u))=-\frac{dF(\alpha(u))}{du}$$

だから

$$\begin{aligned}&\int du\ \rho(u)u\{F,A\}(\alpha(u))\\&=-\int du\frac{d}{du}[\rho(u)uF(\alpha(u))]\\&\quad+\int du\frac{d\rho(u)}{du}uF(\alpha(u))+\overline{F}[\alpha]\end{aligned}\tag{16}$$

となる。$t=v=0$ のときの(16)に示唆されて，新しい実パラメーター ν を導入して

$$\begin{aligned}&\overline{B}[\beta]\frac{\partial\mathbf{E}(f^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}})}{\partial t}-\overline{A}[\alpha]\frac{\partial\mathbf{E}(s^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}})}{\partial t}\\&=\int du\frac{d}{du}[\rho(u)uF(\alpha_{t/\nu,v/\nu}(u))]\\&\quad-\int du\frac{d\rho(u)}{du}uF(\alpha_{t/\nu,v/\nu}(u))\end{aligned}\tag{17}$$

であると仮定しよう。

すると，$t=v=0$ において，

$$\frac{\partial\theta^{\beta_j}_{\alpha_{0,0}}}{\partial t}=\lambda\overline{F}[\alpha_{0,0}]\tag{18}$$

を得る。

$$\frac{\partial}{\partial v}F(\alpha_{t/\nu,v/\nu}(u))=\frac{1}{\nu}\{G_{t/\nu},F\}(\alpha_{t/\nu,v/\nu}(u))\tag{19}$$

である。ここで，$G_t:=G\circ\mathrm{Exp}(-t)X_F$ とした。従って，

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\theta^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}}}{\partial v\partial t}\\&=\frac{\lambda}{\nu}\int du\frac{d}{du}[\rho(u)u\{G_{t/\nu},F\}(\alpha_{t/\nu,v/\nu}(u))]\\&\quad-\frac{\lambda}{\nu}\int du\frac{d\rho(u)}{du}u\{G_{t/\nu},F\}(\alpha_{t/\nu,v/\nu}(u))\\&\quad+\lambda\int du\ \rho(u)u\{G_t,\{F,A\}\}(\alpha_{t,v}(u))\end{aligned}\tag{20}$$

を得る。

$$\alpha_{v,t}(s):=\mathrm{Exp}vX_G\circ\mathrm{Exp}tX_F(\alpha(s))\tag{21}$$

と置いて，$t=v=0$ において，

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\theta^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}}}{\partial v\partial t}\Big|_{t=v=0}-\frac{\partial^2\theta^{\beta_j}_{\alpha_{v,t}}}{\partial t\partial v}\Big|_{v=t=0}\\&=\frac{2\lambda}{\nu}\int du\frac{d}{du}[\rho(u)u\{G,F\}(\alpha_{0/\nu,0/\nu}(u))]\\&\quad-\frac{2\lambda}{\nu}\int du\frac{d\rho(u)}{du}u\{G,F\}(\alpha_{0/\nu,0/\nu}(u))\\&\quad-\lambda\int du\ \rho(u)u\frac{d}{du}\{G,F\}(\alpha_{0,0}(u))\end{aligned}\tag{22}$$

を得る。$\nu=2$ と取ると，

$$\left(\frac{\partial^2\theta^{\beta_j}_{\alpha_{t,v}}}{\partial v\partial t}-\frac{\partial^2\theta^{\beta_j}_{\alpha_{v,t}}}{\partial t\partial v}\right)_{v=t=0}=\lambda\overline{\{G,F\}}[\alpha]\tag{23}$$

となる。

2.2. 線形写像の定義

拙稿［2，3］で行ったように，Q 内の周期的軌道の $U(1)$-リフト $\alpha\star$ の汎関数 $\varphi[\alpha\star]$ の極分解

$$\varphi[\alpha\star]=l[\alpha\star]\mathrm{e}^{i\theta[\alpha\star]}\tag{24}$$

を考えよう。測定の文脈 $\underline{\alpha}$，$\underline{\beta}$ について，$\alpha\in\underline{\alpha}$，$\beta_j\in\underline{\beta}$ のとき，$l[\alpha]$ は α だけに依存して，

$$l[\alpha\star]=l(\alpha,\beta_j)\tag{25}$$

となるような非負の実汎関数である［2］。$\theta[\alpha\star]$ は $U(1)$-リフト $\alpha\star$ の汎関数で，

$$\theta[\alpha\star]=\theta^{\beta_j}_{\alpha}\tag{26}$$

を満たすとする。

一般に φ を $U(1)$-リフトを複素数に対応させる写像として，それに対する作用 $\check{F}$ を

$$\check{F}(\varphi)[\alpha\star]:=\frac{1}{i\lambda}\frac{d\varphi[\mathrm{Exp}tX_F(\alpha\star)]}{dt}\Big|_{t=0}\tag{27}$$

によって定義すると，$\check{F}$ は線形写像である。極分解の $l[\alpha\star]=l[\alpha]$ であるような $\varphi[\alpha\star]$ が

張る線形部分空間を定義域として，$\check{F}$ の作用は，(18)が成り立つので，

$$
\begin{aligned}
&\check{F}(\varphi)[\alpha\star]=\frac{1}{i\lambda}\frac{d}{dt}\varphi[\alpha^{\star}_{t,0}]|_{t=0}\\
&=\frac{1}{i\lambda}\int_0^{T_\alpha}du\sum_{\mu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^{\mu}(u)}X_F\cdot\eta^{\mu}(\alpha)\mathrm{e}^{i\theta[\alpha\star]}\\
&+\overline{F}[\alpha]\varphi[\alpha\star]. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

ここで，(η^{μ}) は Q の局所座標系を表し，具体的には，$(\eta^1,\cdots,\eta^{\dim Q}):=(q^1,\cdots,q^{\dim Q/2},\ p_1,\cdots,p_{\dim Q/2})$ である。また $\rho^{\mu}(u):=\eta^{\mu}(\rho(u))$ とし，変分の値は $\rho=\alpha$ で評価するものとする。

2.3. 線形写像の積と正準交換関係

$G{:}Q\to\mathbb{R}$ を Q 上の滑らかな実関数，v を実パラメーターとして，

$$
\check{G}\circ\check{F}(\varphi)[\alpha\star]=\frac{1}{i\lambda}\frac{\partial\check{F}(\varphi)[\mathrm{Exp}vX_G(\alpha\star)]}{\partial v}|_{v=0} \qquad (29)
$$

であるので，

$$
\begin{aligned}
&\check{G}\circ\check{F}(\varphi)[\alpha\star]\\
&=\frac{1}{i\lambda}\frac{\partial}{\partial v}\Bigg[\frac{1}{i\lambda}\int_0^{T_\alpha}du\\
&\left(\sum_{\mu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^{\mu}(u)}|_{\rho=\alpha_{0,v}}X_F\bullet\eta^{\mu}(\alpha_{0,v}(u))\right)\\
&\times\mathrm{e}^{i\theta[\alpha^{\star}_{0,v}]}+i\frac{\partial}{\partial t}\theta[\alpha_{0,v}]\varphi[\alpha^{\star}_{0,v})]\Bigg]_{v=0}
\end{aligned}
$$

となる。

(17)のパラメーター $\nu=2$ とする。

$$
\begin{aligned}
&(i\lambda)^2\check{G}\circ\check{F}(\varphi)[\alpha\star]=\frac{\partial^2\varphi[\alpha^{\star}_{t,v}]}{\partial v\partial s}|_{v=s=0}\\
&=\int_0^{T_\alpha}dudw\sum_{\mu,\nu=1}^{\dim Q}\frac{\delta^2 l[\rho]}{\delta\rho^{\mu}(u)\delta\rho^{\nu}(w)}\\
&\times X_F\cdot\eta^{\mu}(\alpha(u))X_G\cdot\eta^{\nu}(\alpha(w))\mathrm{e}^{i\theta[\alpha\star]}\\
&+\int_0^{T_\alpha}du\sum_{\mu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^{\mu}(u)}X_G\cdot X_F\cdot\eta^{\mu}(\alpha(u))\\
&\times\mathrm{e}^{i\theta[\alpha\star]}\\
&+\int_0^{T_\alpha}du\sum_{\mu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^{\mu}(u)}X_F\cdot\eta^{\mu}(\alpha(u))\\
&\times i\lambda\overline{G}[\alpha]\mathrm{e}^{i\theta[\alpha\star]}\\
&+i\frac{\partial^2\theta[\alpha^{\star}_{t,v}]}{\partial v\partial t}\varphi[\alpha\star]\\
&+i\lambda\overline{F}[\alpha]\\
&\times\int_0^{T_\alpha}dw\sum_{\nu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^{\nu}(w)}X_G\cdot\eta^{\nu}(\alpha(w))\mathrm{e}^{i\theta[\alpha\star]}\\
&+i\lambda\overline{F}[\alpha]i\lambda\overline{G}[\alpha]\varphi[\alpha\star].
\end{aligned}
$$

故に，(23)を使って，

$$
\begin{aligned}
&[\check{G},\check{F}](\varphi)[\alpha\star]\\
&=\check{G}\circ\check{F}(\varphi)[\alpha\star]-\check{F}\circ\check{G}(\varphi)[\alpha\star]\\
&=\left(\frac{1}{i\lambda}\right)^2\int_0^{T_\alpha}du\sum_{\mu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^{\mu}(u)}[X_G,X_F]\cdot\eta^{\mu}(\alpha(u))\\
&\times\mathrm{e}^{i\theta[\alpha\star]}\\
&+\frac{1}{i\lambda^2}\left(\frac{\partial^2\theta[\alpha^{\star}_{t,v}]}{\partial v\partial t}-\frac{\partial^2\theta[\alpha^{\star}_{v,t}]}{\partial t\partial v}\right)\varphi[\alpha\star]\\
&=\left(\frac{1}{i\lambda}\right)^2\int_0^{T_\alpha}du\sum_{\mu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^{\mu}(u)}X_{\{G,F\}}\cdot\eta^{\mu}(\alpha(u))\\
&\times\mathrm{e}^{i\theta[\alpha\star]}\\
&+\frac{1}{i\lambda}\overline{\{G,F\}}[\alpha]\varphi[\alpha\star]\\
&=\frac{1}{i\lambda}\{G\check{,}F\}(\varphi)[\alpha\star].
\end{aligned}
$$

このようにして，線形写像への対応（ˇ）がPoisson 括弧を積とする Lie 代数を保存することが示された。

また，$\lambda=1/\hbar$ とおいて，$G=p_i$，$F=q^j$ とおけば，正準交換関係が得られる。

3．測定の過程

周期的軌道 α から β_j に遷移するときの $s_{\alpha}^{\beta_j}$ と $f_{\alpha}^{\beta_j}$ は，$\alpha(s_{\alpha}^{\beta_j})$ と $\beta_j(f_{\alpha}^{\beta_j})$ が Q の中で近い点である場合が多いと考えることは自然である。そうであるならば，β_j から α への遷移も，平均として近い点を結ぶようなものであろう。つまり，$\alpha(s_{\alpha}^{\beta_j})=\alpha(f_{\beta_j}^{\alpha})$ と $\beta_j(f_{\alpha}^{\beta_j})=\beta_j(s_{\beta_j}^{\alpha})$ が成立する場合が多数であろう。このことから，

$$
\mathbf{E}(s_{\alpha}^{\beta_j})=\mathbf{E}(f_{\beta_j}^{\alpha}), \qquad (30)
$$

$$\mathbf{E}(f_{\alpha}^{\beta_j})=\mathbf{E}(s_{\beta_j}^{\alpha}) \tag{31}$$

を仮定して良いであろう。すると，$t=v=0$ の(14)より，

$$\theta_{\beta_j}^{\alpha}=-\theta_{\alpha}^{\beta_j} \tag{32}$$

となる。

α から β_j へ遷移したときの位相のずれは，

$$\begin{aligned}&\theta_{\alpha}^{\beta_j}+\delta\theta_{\alpha}^{\beta_j}\\&=\lambda\overline{B}[\beta]f_{\alpha}^{\beta_j}-\lambda\overline{A}[\alpha]s_{\alpha}^{\beta_j}\\&\quad-\lambda\int du\ \rho_{\beta_j}(u)uB(\beta_j(u))\\&\quad+\lambda\int du\ \rho(u)uA(\alpha(u))\end{aligned} \tag{33}$$

で，引き続いて β_j から α へ遷移して戻ったときの位相のずれの合計 $\Delta\theta$ は

$$\begin{aligned}\Delta\theta&:=\theta_{\alpha}^{\beta_j}+\delta\theta_{\alpha}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha}+\delta\theta_{\beta_j}^{\alpha}\\&=\lambda\overline{B}[\beta](f_{\alpha}^{\beta_j}-s_{\beta_j}^{\alpha})-\lambda\overline{A}[\alpha](s_{\alpha}^{\beta_j}-f_{\beta_j}^{\alpha})\end{aligned} \tag{34}$$

である。$x=-(\delta\theta_{\alpha}^{\beta_j}+\delta\theta_{\beta_j}^{\alpha})$ と置くと，(33)より確率変数 x の平均は0である，つまり $\mathbf{E}(x)=0$。α から β_j への遷移による α の変形が復元可能というのは，$\Delta\theta=0$ という場合である。測定過程はできるだけ状態を乱さないように調整されていて，復元可能な変形に限られているはずである。従って，(32)より $\Delta\theta=-x$ であるので，$\mathbf{E}(x)=0$ だけではなく $x=0$ となる遷移だけに限られている。言い換えれば，x の確率密度関数はディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ である。

$\alpha\star$ の状態は，$\exp(i\phi_{\alpha}(s_0))=1$ となる $\alpha(s_0)$ の状態であるが，測定に際しては可能なパラメータ s の値の $\alpha(s)$ の状態も用意されることによって，確率的な測定結果になる。N 回の測定を行った場合は，$s_1,\cdots,s_N$ が実現されて，

$$\alpha(s_1),\cdots,\alpha(s_N) \tag{35}$$

という状態達が用意される。$l(\alpha,\beta_j)$ を非負の実数として，α から β_j へ遷移する可能性の度合いを表す量とする。可能性の度合いを表す量という意味は，α の復元可能な変形に限定するという条件は考慮されないという仮定のもとで，N 個の対象が与えられたとき $Nl(\alpha,\beta_j)$ 個の β_j に遷移する可能性が考えられるということである。このような思考上の可能性としては，逆向きの遷移，つまり β_j から α へ遷移する可能性の度合い $l(\beta_j,\alpha)$ と異なる理由が考えられないので，

$$l(\beta_j,\alpha)=l(\alpha,\beta_j) \tag{36}$$

と仮定することは自然であろう。$l(\cdot,\cdot)$ に従って様々な遷移の可能性が考えられるが，それらすべてが実現されるわけではなく，まだ考慮されていない条件によって実際に実現する遷移は制限されていく。

$\alpha\to\beta j\to\alpha$ のような α の復元可能な変形では，$Nl(\beta_j,\alpha)l(\alpha,\beta_j)$ 個のこのような変形となることが思考上では予想される。(36)の仮定から，これは $Nl(\alpha,\beta_j)^2$ 個になる。測定の文脈 $\underline{\beta}$ では，$\beta_1,\cdots,\beta_n$ に遷移し得るので，これらの内で復元可能な変形をすべて足し合わせた数は，最初に用意された N に等しくなければならないという条件が課される。従って

$$\sum_{j=1}^{n}Nl(\alpha,\beta_j)^2=N. \tag{37}$$

故に

$$\sum_{j=1}^{n}l(\alpha,\beta_j)^2=1. \tag{38}$$

別の測定の文脈 $\underline{\gamma}=\{\gamma_1,\cdots\gamma_n\}$ を経由して $\underline{\beta}$ の測定をする場合を考えよう。$\alpha\to\gamma_k\to\beta_j\to\alpha$ のような遷移をした場合，全位相のずれ $\Delta\theta$ は，

$$\Delta\theta=\theta_{\alpha}^{\gamma_k}+\delta\theta_{\alpha}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\delta\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha}+\delta\theta_{\beta_j}^{\alpha} \tag{39}$$

である。確率変数 $x:=-(\delta\theta_{\alpha}^{\gamma_k}+\delta\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\delta\theta_{\beta_j}^{\alpha})$ は，$\mathbf{E}(x)=0$ を満たす。復元可能な変形の条件は，$\Delta\theta=0$ であるから，

$$x=\theta_{\alpha}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha} \tag{40}$$

の場合に限られる。x である確率が $P(x)$ であるなら，$\alpha\to\gamma_k\to\beta_j\to\alpha$ が復元可能な変形である数は，$P(\theta_{\alpha}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha})$ という重みがかけられた数だけになる。従って，N 個の用意された対象の内，$\alpha\to\gamma_k\to\beta_j\to\alpha$ という遷移の思考の上での可能な数にこの重みをかけた数だけが復元可能な変形となり，それは

$$NP(\theta_{\alpha}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha})l(\alpha,\gamma_k)l(\gamma_k,\beta_j)l(\beta_j,\alpha) \tag{41}$$

個である。

$\mathbf{E}(x)=0$ なので，x は位相のずれ $\Delta\theta$ の平均 $\mathbf{E}(\Delta\theta)=\theta_{\alpha}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha}$ からのゆらぎである。β_j から α に戻ってきたときに，平均として $\mathbf{E}(\Delta\theta)$ だけずれているが，$-x$ が加わることで $\Delta\theta=0$ とできるのだから，x という揺らぎがあるということは，α に戻ろうとする安定性があると解釈できるであろう。ゆらぎがない，すなわち $x=0$ しか生じない場合は，$\theta_{\alpha}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha}=0$ の場合しか α に復元できないのだから，安定性が最も少ない場合である。ゆらぎが最大となる $x=\pm\pi$ まで x が生じうる場合は，どんな $\theta_{\alpha}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha}$ の値でも α に復元でき得るので，このようなことは α の変形に対する安定性が非常に強い場合に起きるであろう。以上の考察から，ゆらぎの最小と最大の半分の $x=\pm\pi/2$ までが生じ得るというのが自然な仮説であろう。つまり

$$P(x)=0,\ \forall x\in[-\pi,-\pi/2]\cup[\pi/2,\pi] \tag{42}$$

と仮定しよう。この仮説により，$\alpha\to\gamma_k\to\beta_j\to\alpha$ という α の変形について，k の値によって生じ得るものと生じ得ないものに分類できる。添え字の集合を以下の二つの部分集合に分割しよう：

$$\begin{aligned}&I_{+}(\beta_j)\\&:=\{k\,|\,\theta_{\alpha}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha}\in(-\pi/2,\pi/2)\},\\&I_{-}(\beta_j)\\&:=\{l\,|\,\theta_{\alpha}^{\gamma_l}+\theta_{\gamma_l}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha}\notin(-\pi/2,\pi/2)\}.\end{aligned} \tag{43}$$

N 個の内，$\alpha\to\gamma_k\to\beta_j\to\alpha$ という変形になる数は $P(\theta_{\alpha}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha})$ という重みをかけて，

$$\begin{aligned}&N(\beta_j,k)\\&:=P(\theta_{\alpha}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha})\\&\times Nl(\alpha,\gamma_k)l(\gamma_k,\beta_j)l(\beta_j,\alpha)\end{aligned} \tag{44}$$

である。すると，

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in I_{+}(\beta_j)}N(\beta_j,k)=N \tag{45}$$

でなければならない。

3.1. 重ね合わせの意味

ところで，思考の上では，用意された N 個から，$Nl(\alpha,\gamma_k)l(\gamma_k,\beta_j)l(\beta_j,\alpha)$ 個の変形 $\alpha\to\gamma_k\to\beta_j\to\alpha$ が予想される。思考の上で $l(\cdot,\cdot)$ による遷移以外の何らかの条件を考慮するならばこの数よりも少ない予想となるが，復元可能性の条件を考慮しなければ，この予想の重みは(45)を満たす $P(\theta_{\alpha}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha})$ よりも大きくなるであろう。この予想での重みと P との差を δP で表すと，

$$\begin{aligned}&N'(\beta_j,k)\\&:=(P+\delta P)(\theta_{\alpha}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha})\\&\times Nl(\alpha,\gamma_k)l(\gamma_k,\beta_j)l(\beta_j,\alpha)\end{aligned} \tag{46}$$

個の変形 $\alpha\to\gamma_k\to\beta_j\to\alpha$ が予想される。すると

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in I_{+}(\beta_j)}\delta P(\theta_{\alpha}^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha})\\&\times Nl(\alpha,\gamma_k)l(\gamma_k,\beta_j)l(\beta_j,\alpha)>0\end{aligned} \tag{47}$$

なので

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\in I_{+}(\beta_j)}N'(\beta_j,k)>N \tag{48}$$

となる。用意された N 個の対象が増えるこ

とはないはずだから，多めの予想を修正するために差し引くことが必要になる。$\delta P=0$ とすると $\alpha\to\gamma_k\to\beta_j\to\alpha$ は一体となって分解できない周期的軌道となるが，そこを敢えて $\alpha\to\gamma_k\to\beta_j\to\alpha$ の各遷移の過程に分割されているように見える表現はないだろうか。そのような表現があれば，$\alpha\to\beta_j\to\alpha$ と，$\alpha\to\gamma_k\to\beta_j\to\alpha$，$\alpha\to\gamma_k\to\beta_j\to\gamma_l\to\alpha$ 等といった変形を，途中の状態を特定しないことでどれでも同じ統計的性質をもったものとして扱うことを可能にするであろう。そのような表現は，$(P+\delta P)(x)=\cos x$ とすることで得られる。というのは，$\alpha\to\gamma_k\to\beta_j\to\alpha$ に関して言うと，

$$\begin{aligned}&\cos(\theta_\alpha^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha})\\&=\Re\left(e^{i\left(\theta_\alpha^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha}\right)}\right)\\&=\Re\left(e^{i\theta_\alpha^{\gamma_k}}\,e^{i\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}}\,e^{i\theta_{\beta_j}^{\alpha}}\right)\end{aligned}\tag{49}$$

のように表示を掛け算に分解したものの実部とできるからである。

$$\begin{aligned}&N'(\beta_j,k)\\&:=\cos(\theta_\alpha^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha})\\&\times Nl(\alpha,\gamma_k)l(\gamma_k,\beta_j)l(\beta_j,\alpha)\end{aligned}\tag{50}$$

と定義する。すると，$l\in I_-(\beta_j)$ については，$N'(\beta_j,l)\leq 0$ となってしまう。そこで，

$$N'_-(\beta_j):=-\sum_{l\in I_-(\beta_j)}N'(\beta_j,l)\tag{51}$$

とおくと，$N_-(\beta_j)\geq 0$ である。これは，思考の上ではあり得るが，復元可能な変形に限定したときには除かれる変形の数である。同様に，

$$N'_+(\beta_j):=\sum_{k\in I_+(\beta_j)}N'(\beta_j,k)\tag{52}$$

とおく。これは，復元可能な変形だけではなく，思考の上であり得る変形の数も加えられたものである。これらに対する要請は，

$$\sum_{j=1}^{n}(N'_+(\beta_j)-N'_-(\beta_j))=N\tag{53}$$

となる。この式は，重ね合わせを意味している。復元可能な変形の途中の状態を思考の上で特定して考えると，この式のような差し引きが必要であるということである。また，$(P+\delta P)(x)=\cos x$ と置いたので，負の確率があるように見える表現になっているが，それは飽くまでも思考の上だけの話である。

$(P+\delta P)(x)=\cos x$ とし，(53)のように用意された対象の数 N が変わらないという要請から，$l(\alpha,\gamma_k)$ 達が状態ヴェクトルの重ね合わせの条件を満たすようなものに限定されることを以下で証明しよう。少し込み入った計算をするので，馴染みのブラ・ケット記法を利用しよう。例えば

$$\langle\alpha\,|\,\gamma_k\rangle:=l(\alpha,\gamma_k)e^{i\theta_\alpha^{\gamma_k}}\tag{54}$$

のように書くことにする。(32)と(36)から，＊で複素共役を表すと

$$\langle\alpha\,|\,\gamma_k\rangle^*=\langle\gamma_k\,|\,\alpha\rangle\tag{55}$$

が成り立つことに注意しよう。

まず，$\alpha\to\gamma_k\to\beta_j\to\alpha$ といった変形の場合の(53)については，

$$\begin{aligned}&N\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(\theta_\alpha^{\gamma_k}+\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}+\theta_{\beta_j}^{\alpha})l(\alpha,\gamma_k)\\&\times l(\gamma_k,\beta_j)l(\beta_j,\alpha)\\&=N\Re\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}l(\alpha,\gamma_k)e^{i\theta_\alpha^{\gamma_k}}l(\gamma_k,\beta_j)e^{i\theta_{\gamma_k}^{\beta_j}}\\&\times l(\beta_j,\alpha)e^{i\theta_{\beta_j}^{\alpha}}\\&=N\Re\sum_{j=1}^{n}\langle\beta_j\,|\,\alpha\rangle\sum_{k=1}^{n}\langle\alpha\,|\,\gamma_k\rangle\langle\gamma_k\,|\,\beta_j\rangle=N\end{aligned}\tag{56}$$

というように書き直せる。

$\alpha\to\beta_j\to\alpha$ の場合の(53)に相当する要請は，

$$N\Re\sum_{j=1}^{n}\langle\alpha\,|\,\beta_j\rangle\langle\beta_j\,|\,\alpha\rangle=N\tag{57}$$

となる。

$\alpha\to\gamma_k\to\beta_j\to\gamma_l\to\alpha$ の場合の(53)に相当する要請は，

$$N\Re\sum_{j=1}^{n}\sum_{k}^{n}\langle\alpha|\gamma_k\rangle\langle\gamma_k|\beta_j\rangle\sum_{l}^{n}\langle\beta_j|\gamma_l\rangle\langle\gamma_l|\alpha\rangle=N \tag{58}$$

となる。

(56)から(57)を引いて

$$\Re\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\langle\alpha|\gamma_k\rangle\langle\gamma_k|\beta_j\rangle-\langle\alpha|\beta_j\rangle\right)\langle\beta_j|\alpha\rangle=0 \tag{59}$$

を得る。

(58)から(56)を引いて，

$$\Re\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n}\langle\beta_j|\gamma_l\rangle\langle\gamma_l|\alpha\rangle-\langle\beta_j|\alpha\rangle\right)\times\sum_{k=1}^{n}\langle\alpha|\gamma_k\rangle\langle\gamma_k|\beta_j\rangle=0 \tag{60}$$

を得る。

(60)の複素共役から(59)を引いて，

$$\Re\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\langle\alpha|\gamma_k\rangle\langle\gamma_k|\beta_j\rangle-\langle\alpha|\beta_j\rangle\right|^2=0 \tag{61}$$

を得る。従って，

$$\sum_{k=1}^{n}\langle\alpha|\gamma_k\rangle\langle\gamma_k|\beta_j\rangle=\langle\alpha|\beta_j\rangle \tag{62}$$

が成り立つ。$|\beta_j\rangle$ が任意だとすると，

$$\sum_{k=1}^{n}\langle\alpha|\gamma_k\rangle\langle\gamma_k|=\langle\alpha| \tag{63}$$

という状態ヴェクトルの重ね合わせの式が成立する。

3.2. 隠れた対象

ここまでの考察では，測定に際して N 個の対象が用意されているとした。しかし，測定の文脈 $\underline{\beta}$ とは異なる測定の文脈でも同一の N 個の対象が用意されるとは限らない。つまり，存在はするが測定の文脈に依存して測定対象となったりならなかったりするという可能性は除くことはできない。この可能性は，EPR 型の実験におけるベルの不等式の破れと局所性が両立することを可能にするものであるため［4］，考察に値する。

測定に先立って，$\alpha(s_1),\cdots,\alpha(s_N)$ という N 個の対象が用意されるとした。$a=A(\alpha(0))$ と置くと，(11)と(12)より，$\phi_\alpha(s)=\lambda a(s-T_\alpha/2)$ となるので，$\alpha^\star$ は $\alpha(T_\alpha/2)$ の状態にあることを表している。従って，$\alpha(s_i)$ の状態は，$e^{-i\lambda(s_i-T_\alpha/2)}\alpha^\star$ で表される。これから位相が π だけずれた状態は，$e^{-i\lambda(s_i-T_\alpha/2)+i\pi}\alpha^\star$ で表される。これは，$\alpha(s_i)$ が測定対象となる状況では，位相が π だけずれるような変化が必要で，$\alpha(s_i)$ とは相容れない状態と考えられる。そこで，位相が π だけずれた状態の対象も存在していると考えてみてはどうだろうか。$e^{-i\lambda(s_i-T_\alpha/2)}\alpha^\star$ が顕在化した対象であるとき，$e^{-i\lambda(s_i-T_\alpha/2)+i\pi}\alpha^\star$ は隠れた対象である。

$\alpha(s_i)$ から $\gamma_k\to\beta_j\to\alpha$ という遷移をしたときに，位相のずれ $\Delta\theta$ が回復可能な範囲である，すなわち $k\in I_+(\beta_j)$ のとき，$e^{-i\lambda(s_i-T_\alpha/2)+i\pi}\alpha^\star$ も同じ位相のずれになるので，隠れた状態のままになる。一方，すなわち $k\in I_-(\beta_j)$ のときは，$e^{-i\lambda(s_i-T_\alpha/2)}\alpha^\star$ からの遷移は測定されず，$e^{-i\lambda(s_i-T_\alpha/2)+i\pi}\alpha^\star$ が測定可能になり顕在化するであろう。顕在化している対象の数を N^{revealed} 個とし，π だけ位相がずれた隠れた状態の対象が用意された数を N^{hidden} とする。

$\alpha\to\gamma_k\to\beta_j\to\alpha$ といった変形において，$N_+^{\text{revealed}}(\beta_j)+N_-^{\text{revealed}}(\beta_j)$ は β_j に遷移する思考の上で可能な変形の数である。その中で $N_-^{\text{revealed}}(\beta_j)$ は位相がずれているため復元できない思考上の変形の数であったので，復元可能性の条件からは $N_+^{\text{revealed}}(\beta_j)$ 個までに絞られる。

$$\kappa_{\beta_j}:=\frac{N_+^{\text{revealed}}(\beta_j)}{N_+^{\text{revealed}}(\beta_j)+N_-^{\text{revealed}}(\beta_j)} \tag{64}$$

は，思考の上で可能な変形の数に対して，復元可能性の条件を満たす変形の数の割合である。

何らかの条件によって復元可能な変形のいくつかが除かれ，κ_{β_j} の割合で減少する場合を考えよう。この場合，条件を満たす変形の数は $\kappa_{\beta_j}N_+^{\text{revealed}}(\beta_j)$ 個になる。

N^{hidden} 個用意されている隠れた対象の軌

道の思考上の可能な変形のなかで $N_-^{\text{hidden}}(\beta_j)$ 個は思考の上では顕在化することになるが，実際に顕在化するのはその一部であろう。$N_+^{\text{revealed}}(\beta_j)$ と同様に，κ_{β_j} の割合で $\kappa_{\beta_j}N_-^{\text{hidden}}(\beta_j)$ 個が顕在化すると仮定しよう。すると，$\kappa_{\beta_j}N_+^{\text{revealed}}(\beta_j)+\kappa_{\beta_j}N_-^{\text{hidden}}(\beta_j)$ 個の対象が測定されることになる。

隠れた状態の対象は顕在化している対象の位相が π だけずれたものとしたので，これらは対になっている。従って，$N^{\text{hidden}}=N^{\text{revealed}}$ である。すると，$\kappa_{\beta_j}N_+^{\text{revealed}}(\beta_j)+\kappa_{\beta_j}N_-^{\text{hidden}}(\beta_j)=N_+^{\text{revealed}}(\beta_j)$ であるから，$\sum_{j=1}^{n}N_+^{\text{revealed}}(\beta_j)=N$ が要請されることになる。

このように，ここで考察したような場合では，測定された対象の数だけしかわからなければ，隠れた対象の存在は測定の結果に何の影響も与えないことになる。しかし測定された対象が常に最初に用意されたものではないのに，それが最初に用意されたものとみなすことは，違うものを同じものとみなす過ちを犯していることになる。EPR 型の実験のような場合は，測定装置の影響で粒子対の片方が隠れた状態になってしまった場合，もはや粒子対ではなくなってしまうので，その粒子対は測定結果に含まれない。そのような仕組みで，局所的な実在であってもベルの不等式が破れることになる［4］。実際の実験でも，測定器の検出効率の低さのためにすべての粒子対が測定されないことが実験的証明の抜け穴として問題視されてきたが，隠れた対象が存在するならば検出効率の問題ではなくなる可能性も残されている。

4．隠れた変数の理論：測度論的球体模型

前節まで $\alpha(s_1),\cdots,\alpha(s_N)$ という対象の系列に対して，測定の文脈 $\underline{\beta}$ で物理量 B の値 $b_1,\cdots,b_n$ を測定するという状況を考えてきた。この節では，この考え方はどのような隠れた変数の理論になっているのかを考察する。

量子力学的確率の測度論的球体模型を次のように構成できる。ヒルベルト空間は $\mathfrak{H}=\mathbb{C}^n$ とする。原点を除いた半径 R の複素 n 次元球 G^n を

$$G^n:=\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^n\,|\,0<|\mathbf{z}|\le R\} \qquad (65)$$

と定義する。

$\psi\in\mathfrak{H}$ は，$\mathfrak{H}$ の単位ヴェクトルとする。ψ は量子力学的状態ヴェクトルと解釈される。ψ の張る $\mathfrak{H}$ の線形部分空間を $[\psi]$ で表す。すなわち，

$$[\psi]:=\{c\psi\,|\,c\in\mathbb{C}\}. \qquad (66)$$

ψ に対応した状態の分布を表す G^n 上の確率測度 μ_ψ は，任意の可測関数 $f:G^n\to\mathbb{R}$ に対して

$$\int f(\mathbf{z})d\mu_\psi(\mathbf{z})=\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R dr\ f(re^{i\theta}\psi) \qquad (67)$$

を満たすものとする。μ_ψ は G^n の ψ 方向の半径に集中した分布を表している。

$\hat{B}$ を $\mathfrak{H}$ 上のエルミート行列とし，その固有値を $b_1,\cdots,b_n$ とし，縮退はない，すなわちそれらの固有値はすべて異なるとする。$\hat{B}$ は，観測可能量（オブザーバブル）と解釈される。b_j の単位固有ヴェクトルを $\mathbf{b}_j$ とする。つまり，

$$\hat{B}\mathbf{b}_j=b_j\mathbf{b}_j. \qquad (68)$$

$n\times n$ 行列 U の随伴行列 $U^\dagger$ を

$$U^\dagger:=(\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_n) \qquad (69)$$

と定義する。$\{\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_n\}$ は正規直交基底であるので，U はユニタリー行列である。そして，

$$U\hat{B}U^\dagger=\begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix} \qquad (70)$$

のように，$\hat{B}$ を対角化する。

$$I_j:=\left(R\sum_{i=1}^{j-1}|\mathbf{b}_i^\dagger\mathbf{z}|^2/|\mathbf{z}|^2, R\sum_{i=1}^{j}|\mathbf{b}_i^\dagger\mathbf{z}|^2/|\mathbf{z}|^2\right] \quad (71)$$

と定義する。半開区間 I_j の長さは

$$|I_j|=R|\mathbf{b}_j^\dagger\mathbf{z}|^2/|\mathbf{z}|^2 \quad (72)$$

である。また，

$$\sum_{j=1}^{n}|I_j|=R \quad (73)$$

である。

$\hat{B}$ に対応する確率変数 B:$G^n\to\mathbb{R}$ を

$$B(\mathbf{z}):=\sum_{j=1}^{n}b_j\ \chi_{I_j}(|\mathbf{z}|) \quad (74)$$

と定義する。G^n の ϕ 方向の動径線分を $I_1, \cdots, I_n$ に分割し，各々に固有値 $b_1, \cdots, b_n$ を割り当てているのが，B である。

確率測度 μ_ϕ についての B の期待値 $\mathbf{E}(B)$ は

$$\int d\mu_\phi(\mathbf{z})B(\mathbf{z})=\sum_{j=1}^{n}b_j|\mathbf{b}_j\phi|^2=\phi^\dagger\hat{B}\phi \quad (75)$$

となる。

エルミート行列 $\hat{C}$ が $\hat{B}$ と可換，すなわち $[\hat{C},\hat{B}]=0$ のとき，U は $\hat{C}$ を対角化する。$\hat{C}$ に対応する確率変数 C を(74)と同様の仕方で定義できる。$\hat{C}$ の固有値が縮退している場合は，$[\hat{D},\hat{C}]=0$ となる $\hat{D}$ は，縮退していない部分空間と縮退している部分区間を不変にするユニタリー行列 V で対角化される。

$n=2$ の場合は，$\hat{C}$ が縮退しているとき，それは単位行列 1 のスカラー倍となるので，すべてのエルミート行列と $\hat{C}$ は可換となる。従って，異なる測定の文脈に同時に属する，すなわち同時に対角化される $\hat{C}$ は，単位行列のスカラー倍という自明な場合を除いて存在しない。

ϕ をパラメーターとして，ユニタリー行列 V_ϕ があって，$V_0=1$ であるものとする。例えば，ある方向を軸とした ϕ 回転などが例になる。$\hat{D}(\phi):=V_\phi\hat{B}V_\phi^\dagger$ とする。$UV_\phi^\dagger\hat{D}(\phi)V_\phi U^\dagger$ は対角行列で，$\hat{D}(\phi)$ の固有値は $\hat{B}$ のそれと一致する。$V_\phi U^\dagger$ の縦ヴェクトルを固有ヴェクトルとして，確率変数 $D(\phi)$ を(74)と同様の仕方で定義でき，その期待値は $\phi^\dagger\hat{D}(\phi)\phi$ と一致する。

$n=2$ の場合は，V_ϕ を $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ の成す直交座標系の角度を ϕ だけ回転するユニタリー行列とすると，$\hat{D}(\phi)$ の固有ヴェクトルはすべての測定の文脈を網羅する。また，異なる測定の文脈に同時に属する $\hat{C}$ は自明な場合を除いて存在しないので，この測度論的球体模型は非文脈的隠れた変数の理論を与える。$\phi=\pi/2$ では，$\hat{B}$ の属する測定の文脈に戻り，$\hat{D}(\pi/2)$ は $\hat{B}$ と可換であるが，$V_{\pi/2}$ は $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ の役割を入れ替えるので，$\hat{D}(\pi/2)\neq\hat{B}$ である。

$n\geq3$ の場合は，一つのパラメーターですべての測定の文脈を網羅することは不可能である。それだけではなく，縮退した自明でない $\hat{C}$ の存在が問題を難しくしている。例えば V_ϕ を $\mathbf{b}_2$ を軸として $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_3$ の張る平面内の ϕ 回転としてみよう。実数 $c\neq c_2$ として，

$$U\hat{C}U^\dagger=\begin{pmatrix} c & & & & \\ & c_2 & & & \\ & & c & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (76)$$

であるとする。すべての ϕ について $[V_\phi,\hat{C}]=0$ であるので，$[\hat{D}(\phi),\hat{C}]=0$ である。ϕ を $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_3$ の線形結合とする。$\hat{C}$ に対応する確率変数 C は，$\hat{C}$ が対角化される正規直交系を使って定義されるが，C を定義する I_j 達のうち，$|I_1|+|I_3|$ は ϕ が変化しても不変である。しかし，I_1 と I_3 は ϕ に依存して変化してしまう。エルミート行列としては単一の $\hat{C}$ ではあるが，G^n の点での C の値は ϕ に依存して変化してしまう。ϕ は測定の文脈を定めるので，この測度論的球体模型は $n\geq3$ の場合には，C が測定の文脈に依存しないという要請は満たさない。したがって，この測度

論的球体模型は，文脈的隠れた変数の理論になっている。

しかし，$\hat{C}$ が $c_1=c_2=c$，$c_3\neq c$ で，他の固有値が 0 のように縮退した固有値が隣り合わせに繋がっているときは，$\mathbf{b}_3$ 軸の周りの $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ の張る平面内の回転 V_ϕ に対しては上の問題は生じず，$\hat{C}$ は V_ϕ に関しては非文脈的に定まる。このような観察から，文脈性の原因は，G^n の動径上の点に縮退した $\hat{C}$ の固有値をどのような順番で割り当てるかということにあるといえるだろう。

用意された N 個の対象 $(\alpha(s_1),\cdots,\alpha(s_N))$ に対しての $\underline{\beta}$ の測定結果が $(\beta_{i(s_1)},\cdots,\beta_{i(s_N)})$ であるとする。N 個のものの置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_N$ により $\sigma(\beta_{i(s_1)},\cdots,\beta_{i(s_N)})=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ のように測定値を $b_1,\cdots,b_n$ の順番に並べ替えることができる。G^n の半径の線分 $(0,R]$ を N 等分して，この並べ替えた N 個の測定値を割り当てて定義される関数は，$N\to\infty$ では B に一致するであろう。σ による並べ替えは，B に関する統計的性質に影響は与えないので，この測度論的球体模型の動径方向の自由度が，測定の結果の系列を並べ替えたものであると解釈できる。すると，隠れた変数の理論の文脈性とは，$(\alpha(s_1),\cdots,\alpha(s_N))$ の並び方の問題であり，測定の文脈によってサンプルの得られ方が異なるということであると言えるであろう。測定の文脈が異なるということは，実験では異なる時間と空間での現象を測定するということだから，$(\alpha(s_1),\cdots,\alpha(s_N))$ の順番が変わっていたとしても不思議はではない。α のどの $\alpha(s)$ を取り出して測定するかは，今のところ人間には制御できないからである。

5．まとめ

得られた結果をいくつかまとめておこう。測定における軌道の遷移の仕方について(17)と $\nu=2$ を仮定することで，ポアソン括弧を積とする古典物理量の Lie 代数を保存するように古典物理量に線形写像を対応させることができることが示された。

［1］では単に仮定されていた(32)の由来として，［2］とは異なる説明が得られた。

量子力学的状態の重ね合わせは思考上必要になるものであるという解釈のもと，用意された対象の数と測定された対象の総数が一致するという要請から，ブラ・ケット記法での重ね合わせの式が導かれることを示した。

量子力学の結果を再現する隠れた変数の理論である測度論的球体模型と関連づけて考察し，文脈性は相容れない実験で測定の対象の状態の与えられる順番が異なるところにあるという示唆が得られた。

[参考文献]

［1］内山　智，“量子力学的確率と整合的な周期的軌道の変形について”，北星学園大学短期大学部北星論集，**15**，41-52（2017）.

［2］内山　智，“正準交換関係の導出について”，北星学園大学短期大学部北星論集，**16**，13-25（2018）.

［3］内山　智，“正準交換関係のもう一つの導出方法について”，北星学園大学短期大学部北星論集，**17**，41-48（2019）.

［4］S. Uchiyama, “Local Reality: Can It Exist in the EPR-Bohm Gedanken Experiment?”, *Found. Phys.*, **25**（1995）1561-1575.