研究ノート

正準交換関係のもう一つの導出方法について

内　山　　智
Satoshi UCHIYAMA

目　次

[Abstract]
Alternative Method for Deriving Canonical Commutation Relations

In the previous note [S. Uchiyama, "On Derivations of Canonical Commutation Relations", *Hokusei Review, Junior College*, 16 (2018) 13-25], a mathematical model of a classical mechanical system capable of reproducing quantum-mechanical probabilities was proposed. The model is based on the idea that a quantum-mechanical state corresponds to a periodic trajectory in a classical mechanical phase space. The quantities therein that correspond to the amplitudes of the wave function were considered as values of functionals of a periodic trajectory at the corresponding periodic trajectory. An observable was realized as a linear mapping of a linear space spanned by these functionals. The linear mapping was induced from an infinitesimal transformation on a set of periodic trajectories, which, in its turn, was induced from the Hamiltonian vector field with the observable physical quantity. In the present note, an alternative realization of an observable as a linear mapping is proposed by reconsidering the concept of $U(1)$-lift. In this realization, the Lie algebra of classical physical quantities is preserved.

1. はじめに

拙稿 [1] においては，周期的軌道上に分布する状態のアンサンブルを量子状態と解釈して，古典的物理量が線形写像にどのように対応づけられるかを考察し，それらの線形写像が正準交換関係に従うことや Lie 代数を保存することを示した。本稿では，$U(1)$-リフトの詳細について考察し，[1] において考察されたものとは違うもう一つの Lie 代数を保存する対応を提案する。

対象を取り巻く環境と相互作用した結果，周期的軌道を描く物理的な対象である系 Σ を考え，この物理的な対象の相空間を Q で表わす。Q はシンプレクティック多様体であるとする。Q 内の周期的軌道 α について，その周期を T_α とすると，パラメーター t の単調増加関数 ϕ_α によって，α の $U(1)$-リフト $\alpha^\star$ が次によって定義される。

$$\alpha^\star(t) := \left(\alpha(t), \mathrm{e}^{i\phi_\alpha(t)}\right), \qquad t \in [0, T_\alpha]. \tag{1}$$

ϕ_α は α 内のいくつかの状態のみが用意されるという状況を表現するために導入されたもので，$\mathrm{e}^{i\phi_\alpha(t)} = 1$ となる t のときの状態 $\alpha(t)$

キーワード：量子力学的確率，隠れた変数，周期的軌道，正準交換関係
Key words：Quantum-mechanical Probability, Hidden Variables, Periodic Trajectories, Canonical Commutation Relations

が用意されているということを表現している。このような t は複数個あり得るので，そういった状態のアンサンブルを，$U(1)$-リフト $\alpha^\star$ は表すと解釈される。もっと正確に言うと，

$$\left\{\alpha(t) \in Q \;\middle|\; \mathrm{e}^{i\phi_\alpha(t)} = 1,\ t \in [0, T_\alpha]\right\} \quad (2)$$

という状態の集合を $U(1)$-リフト $\alpha^\star$ は表す。ただし，この集合の各要素 $\alpha(t)$ がどのような重みで用意されているかまでは，$\alpha^\star$ は表現していない。この重みは，α の属さない測定の文脈 $\underline{\beta}$ で [1]，測定結果の生じる確率がどのようになるかに依存して決まるものであって，周期的軌道の形だけでは決まらないものである。

[1] では，ϕ_α には，それが狭義単調増加関数ということ以上の条件は明示されなかった。

$$\theta_\alpha^{\beta_k} = \phi_{\beta_k}(f_\alpha^{\beta_k}) - \mathbf{E}(\phi_\xi(f_\xi)) \quad (3)$$

という関係のもと，

$$\theta_{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)}^{\beta_k} = \theta_\alpha^{\beta_k} + \lambda s\overline{F}[\alpha] \quad (4)$$

という $\theta_\alpha^{\beta_k}$ に対する要請を通して条件づけられたといえる。ここで，

$$\overline{F}[\alpha] := \frac{1}{T_\alpha}\int_0^{T_\alpha} du\ F(\alpha(u)). \quad (5)$$

とした。この要請では，Lie 代数を保存するような物理量と線形写像の対応は，$m = n$ のもと $n \to \infty$ の極限で得られた [1]。この要請を見直すことで，このような極限を取らなくても Lie 代数を保存する対応が得られることを以下で示そう。

2. $U(1)$-リフトの定義

Q 内の周期的軌道 α の $U(1)$-リフトは，位相を与える関数 $\phi_\alpha(t)$ を定めることで定義できるが，ϕ_α は α 以外，例えば α が過去の状態から変形されて得られた場合にその過去の状態などに依存すると考えることにしよう。つまり，σ を Q 内の周期的軌道として，ϕ_α は σ にも依存すると考えよう。C と D を Q 上の正の実関数として，λ を正の実数として

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha,\sigma}(t) \quad := \quad & \lambda t \int du\ \rho(u)C(\alpha(u)) \\ & -2\lambda \int du\ \rho(u)uD(\sigma(u))\end{aligned} \quad (6)$$

という形式で定義されると仮定しよう。ここで，$\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は非負の可積分関数で，

$$\int_{\mathbb{R}} du\rho(u) = 1 \quad (7)$$

を満たすものとする。今後，記述を簡単にするために，Q 上の関数 C の α に沿った ρ による平均を

$$\overline{C}[\alpha] := \int du\ \rho(u)C(\alpha(u)) \quad (8)$$

のようにしばしば書く。

$$\frac{d\phi_{\alpha,\sigma}(t)}{dt} = \lambda \int du\ \rho(u)C(\alpha(u)) > 0 \quad (9)$$

なので，この $\phi_{\alpha,\sigma}(t)$ は t の狭義単調増加関数になっているので，$U(1)$-リフトの位相関数の条件を満たしている。σ の取り方の違いは，$\phi_{\alpha,\sigma}(0)$ の値の違いというだけである。実際，ϕ_α としてこの $\phi_{\alpha,\sigma}$ を採用すると，

$$\alpha^\star(t) = \left(\alpha(t), \mathrm{e}^{i\phi_{\alpha,\sigma}(t)}\right), t \in [0, T_\alpha] \quad (10)$$

となる。γ を Q 内の σ とは別の周期的軌道とし，$\phi_{\alpha,\gamma}(t)$ を使った α の $U(1)$-リフトを $\alpha'^\star$ で表そう。すると，

$$\begin{aligned}& \phi_{\alpha,\sigma}(t) - \phi_{\alpha,\gamma}(t) \\ & = -2\lambda \int du\ \rho(u)u\left(D(\sigma(u)) - D(\gamma(u))\right)\end{aligned}$$

なので，

$$\alpha'^\star = \mathrm{e}^{\,i2\lambda \int du\ \rho(u)u(D(\sigma(u)) - D(\gamma(u)))}\ \alpha^\star \quad (11)$$

となるからである。

2.1. ハミルトニアンのある周期的軌道の $U(1)$-リフト

α が物理量 $A: Q \to \mathbb{R}$ をハミルトニアンとした軌道であるとき，X_A を A により生成されたハミルトニアン・ヴェクトル場とすると，

$$\alpha(t) = \mathrm{Exp}\ tX_A(\alpha(0)) \tag{12}$$

である。

もし $A(\alpha(0)) = 0$ なら，すべての t について $A(\alpha(t)) = 0$ である。c を正の実数として，$A' := A + c$ とおくと，

$$A'(\alpha(0)) = c \neq 0 \tag{13}$$

であり，$X_{A'} = X_A + X_c = X_A$ なので，

$$\alpha(t) = \mathrm{Exp}\ tX_{A'}(\alpha(0)) \tag{14}$$

である。

従って，有限個の周期的軌道 α_i $(i = 1, \cdots, N)$ を考えるのであれば，一般性を失うことなく，

$$A(\alpha_i(0)) \neq 0 \tag{15}$$

と仮定してよい。更に，c を

$$c > -\min\{A(\alpha_1(0)), \cdots, A(\alpha_N(0))\} \tag{16}$$

となるように選べば，$i = 1, \cdots, N$ に対して

$$A'(\alpha_i(0)) > 0 \tag{17}$$

であるので，一般性を失うことなく，

$$A(\alpha_i(0)) > 0 \tag{18}$$

と仮定して良い。

$\phi_{\alpha,\sigma}(t)$ の定義の C と D をこのような A とするならば，

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha,\sigma}(t) &= \lambda t A(\alpha(0)) \\ &\quad -2\lambda \int du\ \rho(u) u A(\sigma(u))\end{aligned} \tag{19}$$

となる。

A を α のハミルトニアンとしたのだから，$A(\alpha(0))$ は α が保存するエネルギーと考えられ，位相は周期 $2\pi/(\lambda A(\alpha(0)))$ で振動する。$\lambda A(\alpha(0))$ が大きくなると，$\alpha^\star$ は α に密に分布する状態を表すアンサンブルを表すことになる。この場合，古典的極限に近づくと予想される。

2.2. ハミルトニアン・フローによって変形された周期的軌道の $U(1)$-リフト

$F: Q \to \mathbb{R}$ を Q 上の滑らかな実関数とし，F から生成される Q 上のフロー $\mathrm{Exp} sX_F$ により，α から Q の周期的軌道

$$\mathrm{Exp} sX_F(\alpha)(t) := \mathrm{Exp} sX_F(\alpha(t)) \tag{20}$$

が得られる。記述を簡単にするために，

$$\alpha_s := \mathrm{Exp} sX_F(\alpha) \tag{21}$$

と書くことにする。

この α_s の $U(1)$-リフトを次のように定義しよう。先ず $\sigma = \alpha_{\frac{s}{2}}$ としてフローの途中（s の値の半分）の軌道として，位相関数を

$$\begin{aligned}&\phi_{\alpha_s,\alpha_{\frac{s}{2}}}(t) \\ =&\lambda t \int du \rho(u) C(\mathrm{Exp} sX_F(\alpha(u))) \\ &-2\lambda \int du \rho(u) u D(\mathrm{Exp}\frac{s}{2} X_F(\alpha(u)))\end{aligned} \tag{22}$$

としよう。$\phi_{\alpha_s,\alpha_{\frac{s}{2}}}(t)$ は狭義単調増加関数でなければならないので，そのために

$$C = (\mathrm{Exp}(-s)X_F)^* A \tag{23}$$

とおけば十分である。実際，

$$\frac{d\phi_{\alpha_s,\alpha_{\frac{s}{2}}}(t)}{dt} = \lambda A(\alpha(0)) > 0 \tag{24}$$

である。また，$D = A$ とおくと

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \phi_{\alpha_s,\alpha_{\frac{s}{2}}}(t)}{\partial s} \\ =&-\lambda \int du \rho(u) u \{F, A\}(\mathrm{Exp}\frac{s}{2} X_F(\alpha(u)))\end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\phi_{\alpha_s,\alpha_{\frac{s}{2}}}(t)}{\partial s}|_{s=0}\\
=& -\lambda\int du\rho(u)u\{F,A\}(\alpha_{\frac{0}{2}}(u))\\
=& \lambda\int du\rho(u)u\{A,F\}(\alpha_{\frac{0}{2}}(u))\\
=& \lambda\int du\rho(u)u\frac{dF(\alpha_{\frac{0}{2}}(u))}{du}\\
=& \lambda\int du\frac{d}{du}\Big(\rho(u)uF(\alpha_{\frac{0}{2}}(u))\Big)\\
& -\lambda\int du\rho(u)F(\alpha_{\frac{0}{2}}(u))\\
& -\lambda\int du\frac{d\rho(u)}{du}uF(\alpha_{\frac{0}{2}}(u))\\
=& -\lambda\int du\rho(u)F(\alpha_{\frac{0}{2}}(u))\\
& -\lambda\int du\frac{d\rho(u)}{du}uF(\alpha_{\frac{0}{2}}(u)).
\end{aligned}$$

最後の等号では，$\rho(u)$ は確率密度関数であったので，$\lim_{u\to\pm\infty}\rho(u)=0$ を用いた。

$\theta^{\beta_k}_{\alpha}=-\theta^{\alpha}_{\beta_k}$ が要請されていた [1] ので，

$$\begin{aligned}
&\theta^{\beta_k}_{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)}=-\theta^{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)}_{\beta_k}\\
=&-\phi_{\alpha_s,\alpha_{\frac{s}{2}}}(f^{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)}_{\beta_k})+\mathbf{E}\big(\phi_{\xi'_s}(f_{\xi'_s})\big)\\
=&-\phi_{\alpha_0,\alpha_{\frac{0}{2}}}(f^{\alpha}_{\beta_k})+\mathbf{E}\big(\phi_{\xi'}(f_{\xi'})\big)\\
&+\lambda\int du\rho(u)F(\alpha_{\frac{0}{2}}(u))\ s\\
&+\lambda\int du\frac{d\rho(u)}{du}uF(\alpha_{\frac{0}{2}}(u))\ s\\
&-\lambda A(\alpha_0(0))\frac{d}{ds}(f^{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)}_{\beta_k})|_{s=0}\ s\\
&+\frac{d}{ds}\mathbf{E}\big(\phi_{\xi'_s}(f_{\xi'_s})\big)|_{s=0}\ s+O(s^2)
\end{aligned}$$

であるから，ξ'_s の分布が

$$\begin{aligned}
&\lambda\int du\frac{d\rho(u)}{du}uF(\alpha_{\frac{0}{2}}(u))\\
&+\frac{d}{ds}\mathbf{E}\big(\phi_{\xi'_s}(f_{\xi'_s})\big)|_{s=0}\\
&-\lambda A(\alpha_0(0))\frac{d}{ds}(f^{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)}_{\beta_k})|_{s=0}=0
\end{aligned}\tag{25}$$

を満たすようなものであるならば，

$$\begin{aligned}
&\theta^{\beta_k}_{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)}\\
=&\ \theta^{\beta_k}_{\alpha}+\lambda\int du\rho(u)F(\alpha_{\frac{0}{2}}(u))\ s+O(s^2)\\
=&\ \theta^{\beta_k}_{\alpha}+\lambda\overline{F}[\alpha_{\frac{0}{2}}]\ s+O(s^2)
\end{aligned}\tag{26}$$

が成り立ち，[1] の要請が満たされる。

3．古典的物理量の線形写像への対応

[1] で行ったように，Q 内の周期的軌道の $U(1)$-リフト $\alpha^\star$ の汎関数 $\varphi[\alpha^\star]$ の極分解

$$\varphi[\alpha^\star]=l[\alpha^\star]\mathrm{e}^{i\theta[\alpha^\star]}\tag{27}$$

を考えよう。測定の文脈 $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ について，$\alpha\in\underline{\alpha}$，$\beta_j\in\underline{\beta}$ のとき，$l[\alpha]$ は α だけに依存して，

$$l[\alpha^\star]=l(\beta_j|\alpha)\tag{28}$$

となるような非負の実汎関数である [1]。$\theta[\alpha^\star]$ は $U(1)$-リフト $\alpha^\star$ の汎関数で，

$$\theta[\alpha^\star]=\theta^{\beta_j}_{\alpha}\tag{29}$$

を満たすとする。$\alpha^\star$ は，α だけではなく，$\phi_{\alpha,\sigma}$ のように別の周期的軌道 σ にも依存しうるのだから，

$$\theta[\alpha^\star]=\theta[\alpha,\sigma]\tag{30}$$

のようにも考えることができる。

3.1. 線形写像の定義

一般に φ を $U(1)$-リフトを複素数に対応させる写像として，それに対する作用 $\check{F}$ を

$$\check{F}(\varphi)[\alpha^\star]:=\frac{1}{i\lambda}\frac{d\varphi[\mathrm{Exp}sX_F(\alpha^\star)]}{ds}|_{s=0}\tag{31}$$

によって定義すると，$\check{F}$ は線形写像である。

$l[\alpha^\star]=l[\alpha]$ であるような $\varphi[\alpha^\star]$ が張る線形部分空間を定義域として，$\check{F}$ の作用がどうなるか調べてみよう。式 (25) が成り立つ $\alpha^\star$ については，(26) が成り立つので，

$$
\begin{aligned}
& \check{F}(\varphi)[\alpha^\star] \\
= \;& \frac{1}{i\lambda}\frac{d}{ds}\varphi[\mathrm{Exp}sX_F(\alpha^\star)]|_{s=0} \\
= \;& \frac{1}{i\lambda}\int_0^{T_\alpha} du \sum_{\mu=1}^{\mathrm{dim}Q} \frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)}|_{\rho=\alpha_0} X_F\cdot\eta^\mu(\alpha_0) \\
& \times \mathrm{e}^{i\theta[\alpha^\star]} \\
& + \overline{F}[\alpha_{\frac{0}{2}}]\ \varphi[\alpha^\star]. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

ここで，(η^μ) は Q の局所座標系を表し，具体的には，$(\eta^1,\cdots,\eta^{\mathrm{dim}Q}) := (q^1,\cdots,q^{\mathrm{dim}Q/2}, p_1,\cdots,p_{\mathrm{dim}Q/2})$ である。また $\rho^\mu(u) := \eta^\mu(\rho(u))$ とし，変分の値は $\rho=\alpha_0$ で評価するものとする。

式 (25) が成り立たたない $\alpha^\star$ については，どのような形になるかは一般的には不明である。

3.2. 線形写像の積

$G:Q\to\mathbb{R}$ を Q 上の滑らかな実関数，v を実パラメーターとして，

$$
\check{G}\circ\check{F}(\varphi)[\alpha^\star] = \frac{1}{i\lambda}\frac{\partial \check{F}(\varphi)[\mathrm{Exp}vX_G(\alpha^\star)]}{\partial v}|_{v=0} \qquad (33)
$$

であるので，

$$
\begin{aligned}
& \check{G}\circ\check{F}(\varphi)[\alpha^\star] \\
=& \frac{1}{i\lambda}\frac{d}{dv}\Bigg[\\
& \frac{1}{i\lambda}\int_0^{T_\alpha} du\Big(\sum_{\mu=1}^{\mathrm{dim}Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)}|_{\rho=\mathrm{Exp}vX_G(\alpha_0)} \\
& \times X_F\cdot\eta^\mu(\mathrm{Exp}vX_G(\alpha_0)(u))\Big)\mathrm{e}^{i\theta[\mathrm{Exp}vX_G(\alpha^\star)]} \\
& + i\lambda\overline{F}[\mathrm{Exp}\frac{v}{2}X_G(\alpha_{\frac{0}{2}})]\ \varphi[\mathrm{Exp}vX_G(\alpha^\star)]\Bigg]|_{v=0}
\end{aligned}
$$

となる。$\overline{F}[\mathrm{Exp}\frac{v}{2}X_G(\alpha_{\frac{0}{2}})]$ の 1/2 に注意して欲しい。

これは，

$$
\check{G}\circ\check{F}(\varphi)[\alpha^\star] = \left(\frac{1}{i\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2\varphi[\mathrm{Exp}sX_F\circ\mathrm{Exp}vX_G(\alpha^\star)]}{\partial v\partial s}|_{v=s=0}
$$

という計算と同じと考えられる。そう考えることができるためには，$\mathrm{Exp}sX_F\circ\mathrm{Exp}vX_G(\alpha)$ の $U(1)$-リフトがどのように定義されれば良いか以下で考察しよう。記述を簡単にするために，以下では

$$
\alpha_s = \mathrm{Exp}\ sX_F(\alpha), \qquad (34)
$$
$$
\alpha_v = \mathrm{Exp}\ vX_G(\alpha) \qquad (35)
$$

を意味するとしよう。

まず，

$$
\begin{aligned}
& \phi_{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha_v),\mathrm{Exp}\frac{s}{2}X_F(\alpha_{\frac{v}{2}})}(t) \\
=\;& \lambda t\int du\rho(u)C(\mathrm{Exp}sX_F(\alpha_v(u))) \\
& -2\lambda\int du\rho(u)uD(\mathrm{Exp}\frac{s}{2}X_F(\alpha_{\frac{v}{2}}(u)))
\end{aligned}
$$

という形であると考えてみよう。つまり，$\sigma = \mathrm{Exp}\frac{s}{2}X_F(\alpha_{\frac{v}{2}})$ としてみた。$\phi_{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha_v),\mathrm{Exp}\frac{s}{2}X_F(\alpha_{\frac{v}{2}})}(t)$ は狭義単調増加関数でなければならないので，そのために

$$
C = (\mathrm{Exp}(-v)X_G\circ\mathrm{Exp}(-s)X_F)^*A \qquad (36)
$$

とおけば十分である。実際，

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\phi_{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha_v),\mathrm{Exp}\frac{s}{2}X_F(\alpha_{\frac{v}{2}})}(t) \\
& = \lambda A(\alpha(0)) > 0
\end{aligned}
$$

である。また，$D=A$ とおくと，

$$
\frac{\partial\phi_{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha_v),\mathrm{Exp}\frac{s}{2}X_F(\alpha_{\frac{v}{2}})}(t)}{\partial s} = -\lambda\int du\rho(u)u\{F,A\}(\mathrm{Exp}\frac{s}{2}X_F(\alpha_{\frac{v}{2}}(u)))
$$

である。そして，

$$
\frac{\partial^2\phi_{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha_v),\mathrm{Exp}\frac{s}{2}X_F(\alpha_{\frac{v}{2}})}(t)}{\partial v\partial s}|_{s=0} = -\frac{\lambda}{2}\int du\rho(u)u\{G,\{F,A\}\}(\alpha_{\frac{v}{2}}(u))
$$

である。

さて，

$$
\begin{aligned}
&\theta^{\beta_j}_{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha_v)} = -\theta^{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha_v)}_{\beta_j} \\
= \ & -\phi_{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha_v),\mathrm{Exp}\frac{s}{2}X_F(\alpha_{\frac{v}{2}})}(f^{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha)}_{\beta_j}) \\
& +\mathbf{E}\Big(\phi_{\xi'_{s,v}}(f_{\xi'_{s,v}})\Big) \\
= \ & -\phi_{\alpha_v,\alpha_{\frac{v}{2}}}(f^{\alpha_v}_{\beta_j}) + \mathbf{E}\Big(\phi_{\xi'_{0,v}}(f_{\xi'_{0,v}})\Big) \\
& +\lambda\int du\rho(u)F(\alpha_{\frac{v}{2}}(u))s \\
& +\lambda\int du\frac{d\rho(u)}{du}uF(\alpha_{\frac{v}{2}}(u))s \\
& -\lambda A(\alpha_v(0))\frac{d}{ds}(f^{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha_v)}_{\beta_j})|_{s=0}s \\
& +\frac{d}{ds}\mathbf{E}\Big(\phi_{\xi'_{s,v}}(f_{\xi'_{s,v}})\Big)|_{s=0}s + O(s^2)
\end{aligned}
$$

であるから，$\xi'_{s,v}$ の分布が

$$
\begin{aligned}
&\lambda\int du\frac{d\rho(u)}{du}uF(\alpha_{\frac{v}{2}}(u)) \\
&+\frac{d}{ds}\mathbf{E}\Big(\phi_{\xi'_{s,v}}(f_{\xi'_{s,v}})\Big)|_{s=0} \\
&-\lambda A(\alpha_v(0))\frac{d}{ds}(f^{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha_v)}_{\beta_j})|_{s=0} \\
&=0
\end{aligned}
\tag{37}
$$

を満たすと仮定すると，

$$
\begin{aligned}
&\theta^{\beta_j}_{\mathrm{Exp}sX_F(\alpha_v)} \\
= \ & \theta^{\beta_j}_{\alpha_v} + \lambda\int du\rho(u)F(\alpha_{\frac{v}{2}}(u))s + O(s^2) \\
= \ & \theta^{\beta_j}_{\alpha_v} + \lambda\overline{F}[\mathrm{Exp}\frac{v}{2}X_G(\alpha)]s + O(s^2)
\end{aligned}
$$

となり，$\varphi[\mathrm{Exp}sX_F\circ\mathrm{Exp}vX_G(\alpha^\star)]$ を s で偏微分したときに，$\overline{F}[\mathrm{Exp}\frac{v}{2}X_G(\alpha)]$ の項が生ずることがわかる。

3.3. Lie代数を保存する対応

前節の (37) を仮定して，次を得る。

$$
\begin{aligned}
&(i\lambda)^2\check{G}\circ\check{F}(\varphi)[\alpha^\star] \\
&=\frac{\partial^2\varphi[\mathrm{Exp}sX_F\circ\mathrm{Exp}vX_G(\alpha^\star)]}{\partial v\partial s}|_{v=s=0} \\
&=\int_0^{T_\alpha}dudw\sum_{\mu,\nu=1}^{\dim Q}\frac{\delta^2 l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)\delta\rho^\nu(w)} \\
&\quad\times X_F\cdot\eta^\mu(\alpha(u))\ X_G\cdot\eta^\nu(\alpha(w)) \\
&\quad\times \mathrm{e}^{i\theta[\alpha^\star]} \\
&\quad+\int_0^{T_\alpha}du\sum_{\mu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)}X_G\cdot X_F\cdot\eta^\mu(\alpha(u)) \\
&\quad\times \mathrm{e}^{i\theta[\alpha^\star]} \\
&\quad+\int_0^{T_\alpha}du\sum_{\mu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)}X_F\cdot\eta^\mu(\alpha(u)) \\
&\quad\times i\lambda\overline{G}[\alpha]\ \mathrm{e}^{i\theta[\alpha^\star]} \\
&\quad+i\lambda\frac{1}{2}\overline{\{G,F\}}[\alpha]\ \varphi[\alpha^\star] \\
&\quad+i\lambda\overline{F}[\alpha] \\
&\quad\times\int_0^{T_\alpha}dw\sum_{\nu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\nu(w)}X_G\cdot\eta^\nu(\alpha(w))\mathrm{e}^{i\theta[\alpha^\star]} \\
&\quad+i\lambda\overline{F}[\alpha]\ i\lambda\overline{G}[\alpha]\ \varphi[\alpha^\star].
\end{aligned}
$$

故に

$$
\begin{aligned}
&[\check{G},\check{F}](\varphi)[\alpha^\star] \\
=&\check{G}\circ\check{F}(\varphi)[\alpha^\star]-\check{F}\circ\check{G}(\varphi)[\alpha^\star] \\
=&\left(\frac{1}{i\lambda}\right)^2\int_0^{T_\alpha}du\sum_{\mu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)}[X_G,X_F]\cdot\eta^\mu(\alpha(u)) \\
&\times e^{i\theta[\alpha^\star]} \\
&+\frac{1}{i\lambda}\frac{1}{2}\overline{\{G,F\}}[\alpha]\ \varphi[\alpha^\star] \\
&-\frac{1}{i\lambda}\frac{1}{2}\overline{\{F,G\}}[\alpha]\ \varphi[\alpha^\star] \\
=&\left(\frac{1}{i\lambda}\right)^2\int_0^{T_\alpha}du\sum_{\mu=1}^{\dim Q}\frac{\delta l[\rho]}{\delta\rho^\mu(u)}X_{\{G,F\}}\cdot\eta^\mu(\alpha(u)) \\
&\times e^{i\theta[\alpha^\star]} \\
&+\frac{1}{i\lambda}\overline{\{G,F\}}[\alpha]\ \varphi[\alpha^\star] \\
=&\frac{1}{i\lambda}\{G,\check{F}\}(\varphi)[\alpha^\star].
\end{aligned}
$$

このようにして，Lie 代数を保存する線形写像との対応 ($\check{}$) が得られた。

また，$\lambda=1/\hbar$ とおいて，$G=p_i$，$F=q^j$ とおけば，正準交換関係が得られる。

4．結論と考察

$U(1)$-リフトの具体的な形を考察することで，(37) や (25) が成立する $U(1)$-リフトにおいて，位相関数と α から β_j への遷移における位相のずれ $\theta_\alpha^{\beta_j}$ を関連付け，古典的物理量 F を線形写像 $\check{F}$ へ対応させるもう一つの方法があることが示された。この線形写像は，極分解の大きさ $l[\alpha^\star]$ が α だけに依存する $\varphi[\alpha^\star]$ が張る線形空間上で，(37) や (25) が成立する $U(1)$-リフトにおいて Lie 代数を保存する。

仮定 (25) は (37) の $v=0$ の特別な場合なので，実は (37) を仮定するだけで良い。$\mathrm{Exp}sX_F\circ\mathrm{Exp}vX_G\circ\mathrm{Exp}rX_H(\alpha^\star)$ のように三つのフローを重ねた場合にどのような条件が必要になるかは，未検討であるが，自然に一般化できそうである。

仮定 (25) は実は奇妙な仮定である。というのは，$c\in\mathbb{R}$ として，$F':=F+c$ とすると，

$$
\begin{aligned}
&\int du\rho(u)F'(\alpha_{\frac{0}{2}}(u)) \\
=&\int du\rho(u)F(\alpha_{\frac{0}{2}}(u))+c
\end{aligned}
$$

であるが，

$$
\begin{aligned}
&\int du\rho(u)F'(\alpha_{\frac{0}{2}}(u)) \\
&+\int du\frac{d\rho(u)}{du}uF'(\alpha_{\frac{0}{2}}(u)) \\
=&\int du\rho(u)F(\alpha_{\frac{0}{2}}(u)) \\
&+\int du\frac{d\rho(u)}{du}uF(\alpha_{\frac{0}{2}}(u))
\end{aligned}
$$

であるからである。これは，

$$
\begin{aligned}
&\int du\rho(u)u\{A,F\}(\alpha_{\frac{0}{2}}(u)) \\
=&-\int du\rho(u)F(\alpha_{\frac{0}{2}}(u)) \\
&-\int du\frac{d\rho(u)}{du}uF(\alpha_{\frac{0}{2}}(u))
\end{aligned}
$$

であることと，

$$
\{A,F'\}=\{A,F\}
$$

より従う。つまり，(25) の

$$
\int du\frac{d\rho(u)}{du}uF(\alpha(u))
$$

の項は F の定数の違いを含んでおり，その違いが ξ_s' の分布と β_k から α_s への遷移の到着時刻 $f_{\beta_k}^{\alpha_s}$ に影響するという仮定になっているからである。

Q 上のフローのハミルトニアン F の定数の違いは，フローには全く影響を及ぼさないが，遷移における位相のずれは，その定数の違いを含むことになっている。[1] で要請した (4) は，古典的な Q 上のフローが持たない情報を持つことを要請している。これも量子化という操作が持つ意味の一つなのかもしれない。

参考文献

[1] 内山　智, “正準交換関係の導出について”,
北星学園大学短期大学部北星論集, 16,
13-25 (2018) .