

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 9 日現在

機関番号：30106

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400001

研究課題名(和文) 圏論的表現論とその母関数・力学系・代数統計への応用

研究課題名(英文) Categorical representation theory and its applications to generating functions, dynamical systems and algebraic statistics

研究代表者

吉田 知行 (YOSHIDA, Tomoyui)

北星学園大学・経済学部・教授

研究者番号：30002265

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 圏論的表現論は、数学の中でも特に抽象度の高いが、適用範囲が広い。研究集会などで詳しく内容を解説してきた。研究成果の多くは公表され、あるいは公表予定、あるいは公表予定である。  
 (2) 圏の普遍ゼータ関数は、様々な分野と関係を持つ。グラフの再構成予想や米田の補題との関係は目新しい。  
 (3) 群論の代数統計への応用が発見された。鉛同位体法で使われるキャンベラ距離は、数値解析とも関係する。

研究成果の概要(英文)：(1) Categorical representation theory is abstract theory in mathematics. But it has many application in math. Many results have been published or so will be.  
 (2) Universal zeta functions of categories have relations with much area of math, e.g., reconstruction conjecture for graphs and Yoneda's lemma.  
 (3) A new application of group theory to algebraic statistics was discovered. Camberra metric which appeared in lead isotopo method is also related to Numerical analysis.

研究分野：代数学

キーワード：有限群の表現論 圏論 バーンサイド環 マッキー関手 代数学の応用

## 1. 研究開始当初の背景

本研究の鍵は圏化(categorification)の考えである。位相幾何や場の量子論への高次元圏論の応用の進展に伴い、本世紀に入って本格化し、代数的場の理論の Baez たちが主導している。それによって物理学の記述に圏論が使われ、さらに圏論を通して数学内部の交流が始まった。圏論内部でも理論を使いやすくするための多くの道具が整備された。例えば、三角圏などによるホモロジー代数の書き換え、高次元圏によるホモトピー論の整備がされた。圏論の応用分野の広がりについては、計算機や物理、代数、幾何の専門家により、『数学セミナー』誌上で「圏論の歩き方」として宣伝された(2011)。日本ではまったく盛んでないが、母関数の圏論化については Joyal による「種(species)の理論」がすでにあった。ただ、この概念は、トポス理論的には大きな不満が残る。

代数や組合せ論などの離散数学の圏論化は進展しているとは言いがたかった。有限群の表現論の圏化、とくにバーンサイド環・マッキー関手・丹原関手については、吉田・小田・竹ヶ原、丹原、中岡らが精力的に研究をしていた。最近の研究で分かってきた抽象バーンサイド環(ABR)の理論の重要性はまだ認識されていなかったし、圏論で使われるスパンが行列の概念の圏化であることや、それが、まさか統計への応用(高次元データセットは分割表により同型を除いて一意的に決定されること)につながるとは思ってもいなかった。

今世紀に入って、過去のの研究の見直しが進んでいる。例えば、無限巡回群のバーンサイド環、Witt ベクトルの環、ラムダ環などの関係である(Dress 1988)。

## 2. 研究の目的

目的は、圏化の考えを使って、様々な分野を結びつけることである。

(1) バーンサイド環・マッキー関手・丹原関手の研究。とくに各種バーンサイド環の研究。とくに斜バーンサイド環、単項バーンサイド環。

(2) 力学系の研究。

有限力学系のグロタンディエック環としての無限巡回群のバーンサイド環や Witt ベクトルの探求。

(3) 母関数の圏論的研究。局所有限トポスの丹原関手係数の多項式環とべき級数環を考える。もう1つのアプローチは、無限巡回群のバーンサイド環と Weil ゼータとの関係の追求である。

(4) 代数統計への応用。とくにグレブナー基底の理論に基づく MCMC 法による分割表の列挙問題と、対称群の元のランダムサンプリングによる分割表の列挙法の関係の追求。両者は同じ結論を導くが理由は分かっていない。

## 3. 研究の方法

(1) 圏論的表現論は、高次元圏の見地からの古い成果を見直しと有限群の表現論への応用を考える。

(2) 圏論的母関数の理論はかなりの程度完成しているので、力学系のゼータ関数への応用を計る。

(3) 圏論的力学系、とくにバーンサイド環とゼータ関数を中心に研究する。

(4) 代数統計学については、群上のランダムウォーク(RW)と分割表・系統樹の列挙問題を目指す。

## 4. 研究成果

(1) 各種バーンサイド環については、小田・竹ヶ原との共著論文 [1] が完成した。これは、吉田の古い研究をベースにしているが、単数群の構造を決めるのに、抽象バーンサイド環がガロア亜群の有理指標環に埋め込めることを裏で使っている。抽象バーンサ

イド環埋め込み定理は，論文のプレプリントが完成しており，近く専門誌に投稿予定である．そのほか多くの成果が得られ，研究集会で発表をした(講演 [1], [2], [5])．単項バーンサイド環が，エレメントのカテゴリーのバーンサイド環であることを示した([7])．グラフの再構成予想やゼータ同一性問題(黒田の ZIP)への応用は，講演[3]やセミナー[3]，[6]で話した．

(2) 力学系の研究．母関数やバーンサイド環と母関数の項参照．

(3) 母関数の圏論的研究．圏の普遍ゼータ級数について論文を発表した([8])．Artin-Mazur ゼータ関数との関係が明らかになった．黒木の絶対ヴェイユゼータ関数との関係については北大や愛媛大学のセミナー([3], [6])で発表した．

(4) 代数統計学の研究．これについては関連する鉛同位体法についていくつかの成果が上がった([3]～[6])．とくに回帰分析による3次元散布図内の平面上パターンの散策を行い，考古学的な成果を得た．講演[4]参照．

(5) その他．統計学の問題へのペル方程式の応用([2])，論文[3]の最後に書いたが，鉛同位体法に現れる新井の距離(キャンペラ距離とも)の二次無理数のニュートン近似や連分数近似変も応用は近く『北星論考』に印刷出版される．

#### 5．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計8件)[2]をのぞき査読あり．

[1]Funmihito ODA, Yugen TAKEGAHARA, Tomoyuki YOSHIDA, "The units of a partial Burnside ring relative to the Young subgroups of a symmetric group", Journal of Algebra 460 (2016), 370-379

[2] 吉田知行「等差数列の標準偏差の整数性と」ペル方程式  $x^2-3y^2=1$ 」北星論集 55-2 (2016), 131--135.

[3] 吉田知行「鉛同位体法の数理(4)」数学セミナー 54-11 (2015), 48--53.

[4] 吉田知行「鉛同位体法の数理(3)」数学セミナー 54-10 (2015), 48--52.

[5] 吉田知行「鉛同位体法の数理(2)」数学セミナー 54-09 (2015), 52--56.

[6] 吉田知行「鉛同位体法の数理(1)」数学セミナー 54-08 (2015), 48--52.

[7] Tomoyuki YOSHIDA, "Categories of Elements". RIMS Kokyuroku 1926 (2014), 13--24. URI :

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1926-02.pdf>

[8] Tomoyuki YOSHIDA, "The Burnside ring and the universal zeta function of finite dynamical systems", RIMS Kokyuroku 1872 (2014), 122--131.

URI <http://hdl.handle.net/2433/195486>

〔学会発表〕(計5件)[2]をのぞき招待講演．

[1] 吉田知行「On the abstract Burnside rings」,於『Symposium on Group Theory 2016』,近畿大理工学部,2016/03/02 14:00--15:30

[2] 小田文仁・竹ヶ原裕元・吉田知行, "The units of a partial Burnside ring relative to the Young subgroups of a symmetric group", 於『日本数学会秋期総合分科会』(代数学一般講演),京都産業大学,2015/09/15 15:30--15:40．

[3] 吉田知行「有限群とグラフの再構成予想」,於『第32回代数的組合せ論シンポジウム』,金沢大学サテライト・プラザ,2015/06/23 11:40--12:20.

[4] 吉田知行「鉛同位体法の統計的研究」,於科研費シンポジウム『多様な分野における統計科学の教育・理論・応用の新展開』,

新潟大学, 2014/10/25 15:30-16:10 .  
[https://m.sc.niigata-u.ac.jp/~hirukawa/seminar/niigata2014\\_program/Tomoyuki\\_YOSHIDA.pdf](https://m.sc.niigata-u.ac.jp/~hirukawa/seminar/niigata2014_program/Tomoyuki_YOSHIDA.pdf)

[5] 吉田知行「エレメントのカテゴリーとその応用(The category of elements and its applications)」, 於 RIMS 研究集会『有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究』, 京都大学数理解析研究所, 2014/03/03 14:40-15:40 .

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕(計 10 件) [3], [9] は招待 .  
ホームページ等  
談話会・セミナー

[1] 吉田知行「抽象バーンサイド環の有理指標環への埋め込み」, 於『群論セミナー』, 北海道大学理学部, 2016/06/06

14:45-16:15.

[2] 吉田知行「圏と有限群のゼータ関数」, 於『群論セミナー』, 北海道大学理学部, 2015/12/21 14:45-16:15.

[3] 吉田知行「有限群とグラフの再構成予想」, 於『愛媛大学代数学セミナー』, 愛媛大学理学部, 2015/10/5 16:30-17:30.

[4] 吉田知行「Abstract Burnside rings

and related topics」, 於『群論セミナー』, 北海道大学理学部, 2015/06/01 14:45-16:15 .

[5] 吉田知行「有限群の再構成問題(ゼータ同一視問題(ZIP))」, 於『群論セミナー』, 近畿大学理工学部, 2015/03/13

14:00-15:30.

[6] 吉田知行「グラフと群の再構成予想」, 於『群論セミナー』, 北海道大学理学部, 2014/12/08 14:45-16:15 .

[7] 吉田知行「有限群に関係した母関数」, 於『群論セミナー』, 北海道大学理学部, 2014/06/09 14:45-14:15 .

[8] 吉田知行「カテゴリーの微分と単項バーンサイド環」, 於『群論セミナー』, 北海道大学理学部, 2013/12/09 14:45-16:15.

[9] 吉田知行「カテゴリーの微分と単項バーンサイド環」, 於『群論セミナー』, 近畿大学理工学部, 2013/12/04(wed)16:30-18:00 .

[10] 吉田知行「モノイダル・バーンサイド環」, 於『群論セミナー』, 北海道大学理学部, 2013/06/04 13:00-14:30 .

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

吉田 知行 (YOSHIDA Tomoyuki)

北星学園大学・経済学部・教授

研究者番号: 30002265

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号:

