研究ノート

量子力学的確率と整合的な周期的軌道の変形について

内　山　　　智
Satoshi UCHIYAMA

目次

［Abstract］

On Deformations of Periodic Trajectories Consistent with Quantum-mechanical Probabilities

A mathematical model of a classical mechanical system that reproduces quantum-mechanical probabilities is considered. The basic idea is that a quantum-mechanical state corresponds to a periodic trajectory in a classical-mechanical phase space. $U(1)$-valued function on the periodic trajectory is introduced in order to distinguish prepared states for experiments from unprepared ones in the trajectory. The phase factor of a wave function is interpreted as the difference between the values of the $U(1)$-valued functions on periodic trajectories between which transition occurs. The influence of measurement on the system is described as a deformation of the periodic trajectory. Various types of deformations are investigated; deformations that associate with creation and annihilation of the systems are included. The definition of a restorable deformation is proposed. It is shown that a quantum-mechanical mixed state is given by measurements that induce only restorable deformations. It is also shown that a quantum-mechanical measurement is such a measurement that does not distinguish the difference between restorable deformations.

１．はじめに

ミクロな物質世界を記述する基礎理論と考えられている量子力学は，ミクロな物理的対象に対して物理量の測定を行ったときに，どのような値がどのような確率で得られるかを記述している。ミクロな対象の物理量の測定のための実験はとても複雑なものなので，そういった複雑な過程は一旦棚上げにして測定実験の結果だけの記述となり，トリックのある奇術のような振る舞いをミクロな対象が行っているような印象が与えられる。一見不思議に思える現象も，そのトリックが分かれば，我々の理性で理解可能である。

本稿では，量子力学のこのトリックを解明することを目的としている。量子力学で記述される現象，すなわち物理量の測定過程を，古典力学的状態（以下，単に状態という）を持つ対象を用いて説明することができることを示す。

量子力学的確率が，実際の物理系について物理量の測定の結果の統計的性質を記述するものであることが確かめられるのは，何度も測定の実験を繰り返すことができる場合だけ

キーワード：量子力学的確率，隠れた変数，周期的軌道
Key words：Quantum-mechanical Probability, Hidden Variables, Periodic Trajectories

である。何度も同じ実験を繰り返すことができるための前提は何であろうか。何度も同じ実験を繰り返すことができるためには，同じ初期条件を満たすように実験家が準備することができるように，対象を制御することができなければならない。

古典力学においては，実験の対象がその状態の相空間内で周期的な軌道を描くならば，その周期ごとに何度でも同じ初期条件で実験を繰り返す準備が可能である。初期条件としてその周期的軌道の一部分をなす状態に対象を制御して準備できさえすれば，その後は対象が周期的軌道にそって状態を変えることになり，何度でも同じ実験を繰り返すことができるようになるだろう。この周期的軌道の中の一つの状態を取り出すように制御できるならば，測定結果はばらつくことなく一意に定まるであろう。量子現象では，測定結果が確率的にばらつくため，このような制御まではできないと考えるべきだろう。

量子力学の通俗的解釈では，物理量の測定をするための実験を行うことで対象の性質は影響を受けて変化し，それが測定結果がばらつく理由であるとするものもあるようだが，我々の考察では，周期的軌道の中での状態を特定するように制御できないことがばらつきの第一の原因と考える。そのため，測定のための実験による影響は，この周期的軌道がある復元可能な範囲で変形されるという影響を与えると考えたい。

更に，周期的軌道の変形には，対象がそれと対をなす“ホール”とともに生成され，または消滅することが関与する変形も許容するというところまで拡張しよう。これはまさに対象のすり替えが行われるというトリックであり，自己同一性のない対象が持ち込まれることになる。

以上の考察から，以下では，対象の状態の成す相空間における周期的軌道が，物理量の測定の実験によってどのように変形されるかの特徴づけを行う。そして，対象と“ホール”の対が生成や消滅をするという仮説を導入し，それによる周期的軌道の変形を考慮することで，どのように量子力学的確率が得られるかを見ていくことにする。

2．周期的軌道の復元可能な変形

物理的対象の古典的状態といったとき，それはシンプレクティック多様体の点で表されるということ以上のことは想定していない。対象が点状の粒子なのか，或いは広がりのある物体なのかは，とりあえず問わない。

対象を取り巻く環境と相互作用した結果，周期的軌道を描く物理的な対象の系 Σ を考えよう。この物理的な対象の相空間を Q で表わすことにする。物理量 $A : Q \to \mathbb{R}$ を測定する文脈 $\underline{\alpha}$ において，高々n 個の測定値 a_i $(i = 1, \cdots, n)$ があり，それらに対応した周期的軌道 α_i $(i = 1, \cdots, n)$ があるとする。n を十分大きくとることで，一般的な場合を十分に近似できるであろうから，簡単のために，以下で考察する測定の文脈は，この n が有限で同一の値のものだけに限ることにする。A の測定値は α_i 上で一定しているとし，その意味で安定している。このような安定性は，測定値を記録するためには必要であろう。つまり，$\sigma \in \alpha_i$ に対して，$A(\sigma) = a_i$ であるが，対象の状態 σ は時間的に α_i に沿って変化し続けるとする。

周期的軌道 α_i は Q の閉曲線なので，周期 $T_{\alpha_i} \in (0, \infty)$ が存在して，$\alpha_i : [0, T_{\alpha_i}] \to Q$ は $\alpha_i(T_{\alpha_i}) = \alpha_i(0)$ なる写像であり，任意の時刻 t に対して $\alpha_i(t + T_{\alpha_i}) = \alpha_i(t)$ となるように定義域を $\mathbb{R}$ に拡張できる。

記述を簡単にするために，記号を導入しよう。Q の曲線 $\gamma_1 : [s_1, f_1] \to Q$ と $\gamma_2 : [s_2, f_2] \to Q$ が $\gamma_1(f_1) = \gamma_2(s_2)$ であるとき，それらの結合 $\gamma_1 \rhd \gamma_2$ を次のように定義する：

$$\gamma_1 \rhd \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [s_1, f_1], \\ \gamma_2(t - f_1 + s_2), & t \in [f_1, f_1 + f_2 - s_2]. \end{cases}$$

2.1. $U(1)$の自由度の意味

もし，実験者が対象 Σ の状態を完全に制御できるならば，測定前に準備される状態をある特定の時刻 t_0 における状態 $\alpha_i(t_0)$ にすることができるであろう。反対に，十分に制御できなければ，$\{\alpha_i(t)\ :\ t \in [0, T_{\alpha_i}]\}$ の要素のどれかであるようにしか準備できないであろう。この両極端な場合の中間として，$\{\alpha_i(t)\ :\ t \in [0, T_{\alpha_i}]\}$ の特定の要素達だけを測定前に準備できる場合もあるであろう。それらの特定の状態が，時間 t の関数 $\theta(t)$ が存在して，その値の 2π の周期で周期的に特定される場合を考えよう。θ の選び方を工夫すれば，準備される特定の状態達が離散的にあるということだけが必要な仮定である。これは，周期的な現象は，ただ一度ではなく，何度も繰り返されるものであるから，一つの特定の状態に制御できない場合でも，準備できる可能性があるという考えに基づいている。θ の選び方を工夫して，$\mathrm{e}^{i\theta(t)}$ が同一の値 1 を持つ状態だけが準備される，すなわち $\{\alpha_i(t)\ :\ \mathrm{e}^{i\theta(t)} = 1, t \in [0, T_{\alpha_i}]\}$ の要素だけを準備できるとしよう。

ϕ を 0 ではない実数として，

$$\theta'(t) := \theta(t) + \phi$$

と定義すると，この θ' で特定される状態達の集合 $\{\alpha_i(t)\ :\ \mathrm{e}^{i\theta'(t)} = 1, t \in [0, T_{\alpha_i}]\}$ は，$\{\alpha_i(t)\ :\ \mathrm{e}^{i\theta(t)} = \mathrm{e}^{-i\phi}, t \in [0, T_{\alpha_i}]\}$ と等しい。このように，$\mathrm{e}^{i\theta(t)}$ に $U(1)$ の要素として $\mathrm{e}^{i\phi}$ を作用させた $\mathrm{e}^{i\theta'(t)}$ は，α_i の異なる時刻の状態の集合を表している。

α_i に同伴するこの $U(1)$ の要素の位相を $\theta_{\alpha_i}(t)$ で表すことにしよう。Q に $U(1)$ のファイバーを持つ直積バンドルを $Q^\star := Q \times U(1)$ と書くことにする。$(\alpha_i)^\star(t) := (\alpha_i(t), \mathrm{e}^{\theta_{\alpha_i}(t)})$ を，α_i の $Q^\star$ への $U(1)$-リフトと呼ぶことにする。

$\alpha_i(t + T_{\alpha_i}) = \alpha_i(t)$ なので，θ_{α_i} は $\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}(t+T_{\alpha_i})} = \mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}(t)}$ を満たさなければならない。

2.2. 軌道の復元可能な変形

周期的軌道 $\gamma : [0, T_\gamma] \to Q$ に同伴する位相を θ_γ として，$\gamma^\star = (\gamma, \mathrm{e}^{i\theta_\gamma})$ である。$\gamma^\star$ が $(\alpha_i)^\star$ の 復元可能な変形であるならば，

$$\begin{aligned} & \{\gamma(t) : \mathrm{e}^{i\theta_\gamma(t)} = 1, t \in [0, T_\gamma]\} \cap \\ & \{\alpha_i(t) : t \in [0, T_{\alpha_i}]\} \\ = \ & \{\gamma(t) : \mathrm{e}^{i\theta_\gamma(t)} = 1, t \in [0, T_\gamma]\} \cap \\ & \{\alpha_i(t)\ :\ \mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}(t)} = 1, t \in [0, T_{\alpha_i}]\} \end{aligned}$$

が必要である。任意の $\phi \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned} & \{\gamma(t) : \mathrm{e}^{i(\theta_\gamma(t)+\phi)} = 1, t \in [0, T_\gamma]\} \cap \\ & \{\alpha_i(t) : t \in [0, T_{\alpha_i}]\} \\ = \ & \{\gamma(t) : \mathrm{e}^{i(\theta_\gamma(t)+\phi)} = 1, t \in [0, T_\gamma]\} \cap \\ & \{\alpha_i(t)\ :\ \mathrm{e}^{i(\theta_{\alpha_i}(t)+\phi)} = 1, t \in [0, T_{\alpha_i}]\} \\ \neq \ & \emptyset \end{aligned}$$

であれば，α_i 上では一致するのだから，$\gamma^\star$ を $(\alpha_i)^\star$ の復元可能な変形と呼んで良い。α_i 上では，γ は同じ状態が準備されるからである。

2.3. 軌道の復元可能な変形 1

対象が描く周期的軌道 α_i を変形して得られた軌道 γ として，α_i が途中で曲線 $\xi : [0, f_\xi] \to Q$ に分岐して戻るという変形 γ が，次のように与えられたとしよう。

$$\gamma := \alpha_i[0, s] \triangleright \xi \triangleright \alpha_i[f, T_{\alpha_i}],$$

ここで，s は α_i の軌道から離れて曲線 ξ に分岐する時刻であり，$\alpha_i(s) = \xi(0)$ である。f は曲線 ξ から α_i に戻ってきたときの α_i 内の状態になる時刻であり，$\alpha_i(f) = \xi(f_\xi)$ である。簡単のために，$s, f \in (0, T_{\alpha_i})$ で，かつ $s < f$ であると仮定しよう。この場合，$t \in [0, s]$ に対して $\alpha_i(t) = \gamma(t)$ であるが，$t \in [f, T_{\alpha_i}]$ に対しては一般に $\alpha_i(t) \neq \gamma(t)$ である。しかし，$t \in [s + f_\xi, s + f_\xi + T_{\alpha_i} - f]$ に対して，$\alpha_i(t - (s + f_\xi) + f) = \gamma(t)$ である。

α_i の $U(1)$-リフト $(\alpha_i)^\star$ に対して，γ の $U(1)$-リフトを定義するとき，同伴する位相

θ_γ は ξ に依存して定まり，次のように定義できる：

$$\theta_\gamma(t) = \begin{cases} \theta_{\alpha_i}(t), & t \in [0, s], \\ \theta_\xi(t), & t \in [s, s+f_\xi], \\ \theta_{\alpha_i}(t-(s+f_\xi)+f), & \\ \qquad t \in [s+f_\xi, f_\xi + T_{\alpha_i} - (f-s)]. & \end{cases} \tag{1}$$

$\theta_{\alpha_i}(f) = \theta_\xi(s+f_\xi)$ が成り立つならば，$\gamma^\star$ は $(\alpha_i)^\star$ の復元可能な変形になる。

ξ は確率的に与えられるとすると，$\theta_\xi(s+f_\xi)$ は確率変数となる。これと $\theta_{\alpha_i}(f)$ との差の ξ についての平均を $\theta^{\alpha_i}_{\alpha_i}$ と書くことにし，

$$\theta_\xi(s+f_\xi) - \theta_{\alpha_i}(f) = \theta^{\alpha_i}_{\alpha_i} + \delta\theta_\xi(s+f_\xi) \tag{2}$$

のように分解すると，$\delta\theta_\xi(s+f_\xi)$ は平均値 $\mathbf{E}(\delta\theta_\xi(s+f_\xi))$ が 0 の確率変数である。$\delta\theta_\xi(s+f_\xi) = x$ となる確率を $w_1(x)$ とすると，$\theta^{\alpha_i}_{\alpha_i} + x = 0$ となる確率は $w_1(-\theta^{\alpha_i}_{\alpha_i})$ であり，この確率で $\gamma^\star$ は $(\alpha_i)^\star$ の復元可能な変形になる。

2.4. 軌道の復元可能な変形 2

対象 Σ は，最初に α_i 内の状態として準備されているとする。物理量 B を測定するために，測定の文脈を $\underline{\alpha}$ から $\underline{\beta}$ に変化させたときを考えよう。測定器との相互作用によって，$\underline{\beta}$ で測定される物理量 B の値 $b_1, \cdots, b_N$ に対応した周期的軌道 $\beta_1, \cdots, \beta_N$ へと α_i は変形されることになる。最初に α_i での時刻 $s^{\beta_k}_{\alpha_i}$ における α_i 内の状態 $\alpha_i(s^{\beta_k}_{\alpha_i})$ にあった Σ は，例えば β_k 内の状態 $\beta_k(f^{\beta_k}_{\alpha_i})$ へと遷移するであろう。この $s^{\beta_k}_{\alpha_i}$ は，$n \in \mathbb{Z}_+$ が存在して $s^{\beta_k}_{\alpha_i} + nT_{\alpha_i}$ が α_i を離れる時刻である。そして，この $f^{\beta_k}_{\alpha_i}$ は，$n' \in \mathbb{Z}_+$ が存在して $f^{\beta_k}_{\alpha_i} + n'T_{\beta_k}$ が β_k に到達する時刻であり，$s^{\beta_k}_{\alpha_i} + nT_{\alpha_i} < f^{\beta_k}_{\alpha_i} + n'T_{\beta_k}$ を満たしていなければならない。

この遷移は，α_i と β_k を繋ぐ曲線 $\xi : [0, f_\xi] \to Q$ に沿うものとしよう。Σ の状態は β_k 内の状態から再び α_i 内の状態へ戻ることによって周期的軌道 α_i の変形となることから，β_k 内の状態 $\beta_k(s^{\alpha_i}_{\beta_k})$ と α_i 内の状態 $\alpha_i(f^{\alpha_i}_{\beta_j})$ を結ぶ曲線 $\xi' : [0, f_{\xi'}] \to Q$ に沿って戻るとしよう。すると，

$$\begin{aligned} &\alpha_i[nT_{\alpha_i}, s^{\beta_k}_{\alpha_i} + nT_{\alpha_i}] \rhd \xi \\ &\rhd \beta_k[f^{\beta_k}_{\alpha_i} + n'T_{\beta_k}, s^{\alpha_i}_{\beta_k} + n'T_{\beta_k}] \\ &\rhd \xi' \rhd \alpha_i[f^{\alpha_i}_{\beta_k} + n''T_{\alpha_i}, (n'''+1)T_{\alpha_i}] \end{aligned}$$

は，周期的軌道になる。これを手短に $\alpha_i \rhd \xi \rhd \beta_k \rhd \xi' \rhd \alpha_i$ と書こう。書く手間を省くために，一時的にこれを記号 γ で表そう，つまり $\gamma := \alpha_i \rhd \xi \rhd \beta_k \rhd \xi' \rhd \alpha_i$ と置こう。更に，簡単のために，以下では $n = n' = n'' = n''' = 0$ を仮定することにする。これは，例えば α_i の時間パラメータの範囲を $[0, T_{\alpha_i}]$ から，$[0, (n+1)T_{\alpha_i}]$ に拡大すれば良いだけなので，この仮定によって一般性を失うことはない。

この周期的軌道 γ が α_i の復元可能な変形であるというのは，各々の $U(1)$-リフト $\gamma^\star$ と $(\alpha_i)^\star$ が，$\gamma \cap \alpha_i$ 上で一致するということである。

α_i，ξ，β_k，ξ' に同伴する位相の関数を，各々 θ_{α_i}，θ_ξ，θ_{β_k}，$\theta_{\xi'}$ で表そう。つまり，

$$\begin{aligned} (\alpha_i)^\star(t) &= (\alpha_i(t), \mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}(t)}), \\ (\xi)^\star(t) &= (\xi(t), \mathrm{e}^{i\theta_\xi(t)}), \\ (\beta_k)^\star(t) &= (\beta_k(t), \mathrm{e}^{i\theta_{\beta_k}(t)}), \\ (\xi')^\star(t) &= (\xi'(t), \mathrm{e}^{i\theta_{\xi'}(t)}) \end{aligned}$$

とする。

$\alpha_i[0, s^{\beta_k}_{\alpha_i}]$ から ξ への接続に際して，

$$\begin{aligned} \theta_\xi(0) &= \theta_{\alpha_i}(s^{\beta_k}_{\alpha_i}) \\ \theta_{\beta_k}(f^{\beta_k}_{\alpha_i}) - \theta_\xi(f_\xi) &= \theta^{\beta_k}_{\alpha_i} + \delta\theta_\xi(f_\xi) \end{aligned}$$

であるとする。ここで ξ は確率的に定まるとすると，$\theta_\xi(f_\xi)$ と $\delta\theta_\xi(f_\xi)$ は確率変数となる。

$$\mathbf{E}(\delta\theta_\xi(f_\xi)) = 0 \tag{3}$$

を仮定する。すると，$\theta^{\beta_k}_{\alpha_i}$ は

$$\theta^{\beta_k}_{\alpha_i} = \theta_{\beta_k}(f^{\beta_k}_{\alpha_i}) - \mathbf{E}(\theta_\xi(f_\xi)) \tag{4}$$

である。

同様にして，$\beta_k[f^{\beta_k}_{\alpha_i}, s^{\alpha_i}_{\beta_k}]$ から ξ' への接続に際して，

$$\begin{aligned}\theta_{\xi'}(0) &= \theta_{\beta_k}(s^{\alpha_i}_{\beta_k})\\ \theta_{\alpha_i}(f^{\alpha_i}_{\beta_k}) - \theta_{\xi'}(f_{\xi'}) &= \theta^{\alpha_i}_{\beta_k} + \delta\theta_{\xi'}(f_{\xi'})\end{aligned}$$

であるとする。

$$\mathbf{E}(\delta\theta_{\xi'}(f_{\xi'})) = 0 \tag{5}$$

を仮定する。すると，$\theta^{\beta_k}_{\alpha_i}$ は

$$\theta^{\alpha_i}_{\beta_k} = \theta_{\alpha_i}(f^{\alpha_i}_{\beta_k}) - \mathbf{E}(\theta_{\xi'}(f_{\xi'})) \tag{6}$$

である。

$\alpha_i[0, s^{\beta_k}_{\alpha_i}] \rhd \xi \rhd \beta_k[f^{\beta_k}_{\alpha_i}, s^{f_{\beta_k}}_{\beta_k}] \rhd \xi'$ から $\alpha_i[f^{\alpha_i}_{\beta_k}, T_{\alpha_i}]$ への接続に際して，位相で

$$\theta_{\beta_k}(f^{\beta_k}_{\alpha_i}) - \theta_\xi(f_\xi) + \theta_{\alpha_i}(f^{\alpha_i}_{\beta_k}) - \theta_{\xi'}(f_{\xi'}) \tag{7}$$

だけのずれが生じる。これは

$$\theta^{\beta_k}_{\alpha_i} + \delta\theta_\xi(f_\xi) + \theta^{\alpha_i}_{\beta_k} + \delta\theta_{\xi'}(f_{\xi'}) \tag{8}$$

に等しい。$\delta\theta_\xi(f_\xi) + \delta\theta_{\xi'}(f_{\xi'}) = x$ となる確率を $w_2(x)$ とすると，$\gamma^\star$ が復元可能な $(\alpha_i)^\star$ の変形である確率は $w_2(-\theta^{\beta_k}_{\alpha_i} - \theta^{\alpha_i}_{\beta_k})$ になる。

2.5. 軌道の復元可能な変形 3

対象 Σ は，最初に α_i 内の状態として準備されているとする。物理量 B を測定するために，測定の文脈を $\underline{\alpha}$ から $\underline{\beta}$ に変化させたときを考えよう。今度は，測定の文脈 $\underline{\rho}$ を経由して β_j に分岐し，再び測定の文脈 $\underline{\rho}$ を経由して α_i に戻るような変形を考えよう。

α_i のこのような変形の一つは次のようなものである：

$$\begin{aligned}\gamma \;:=\; & \alpha_i[0, s^{\rho_k}_{\alpha_i}] \rhd \xi \rhd \rho_k[f^{\rho_k}_{\alpha_i}, s^{\beta_j}_{\rho_k}] \rhd \xi'\\ & \rhd \beta_j[f^{\beta_j}_{\rho_k}, s^{\rho_l}_{\beta_j}] \rhd \xi'' \rhd \rho_l[f^{\rho_l}_{\beta_j}, s^{\alpha_i}_{\rho_l}]\\ & \rhd \xi''' \rhd \alpha_i[f^{\alpha_i}_{\rho_l}, T_{\alpha_i}].\end{aligned}$$

γ が復元可能な α_i の変形であるか否かを知るために，位相のずれがどのようになるかを見てみよう。γ の $U(1)$-リフトについては，次のように定義する：

$$\begin{aligned}\theta_\xi(0) &= \theta_{\alpha_i}(s^{\rho_k}_{\alpha_i}),\\ \theta_{\rho_k}(f^{\rho_k}_{\alpha_i}) - \theta_\xi(f_\xi) &= \theta^{\rho_k}_{\alpha_i} + \delta\theta_\xi(f_\xi),\\ \theta_{\xi'}(0) &= \theta_{\rho_k}(s^{\beta_j}_{\rho_k}),\\ \theta_{\beta_j}(f^{\beta_j}_{\rho_k}) - \theta_{\xi'}(f_{\xi'}) &= \theta^{\beta_j}_{\rho_k} + \delta\theta_{\xi'}(f_{\xi'}),\\ \theta_{\xi''}(0) &= \theta_{\beta_j}(s^{\rho_l}_{\beta_j}),\\ \theta_{\rho_l}(f^{\rho_l}_{\beta_j}) - \theta_{\xi''}(f_{\xi''}) &= \theta^{\rho_l}_{\beta_j} + \delta\theta_{\xi''}(f_{\xi''}),\\ \theta_{\xi'''}(0) &= \theta_{\rho_k}(s^{\alpha_i}_{\rho_k}),\\ \theta_{\alpha_i}(f^{\alpha_i}_{\rho_k}) - \theta_{\xi'''}(f_{\xi'''}) &= \theta^{\alpha_i}_{\rho_k} + \delta\theta_{\xi'''}(f_{\xi'''}),\end{aligned}$$

ここで，

$$\mathbf{E}(\delta\theta_\xi(f_\xi)) = 0, \tag{9}$$
$$\mathbf{E}(\delta\theta_{\xi'}(f_{\xi'})) = 0, \tag{10}$$
$$\mathbf{E}(\delta\theta_{\xi''}(f_{\xi''})) = 0, \tag{11}$$
$$\mathbf{E}(\delta\theta_{\xi'''}(f_{\xi'''})) = 0 \tag{12}$$

を仮定した。従って，$\theta^{\rho_k}_{\alpha_i} := \theta_{\rho_k}(f^{\rho_k}_{\alpha_i}) - \mathbf{E}(\theta_\xi(f_\xi))$ と定めたことになり，$\theta^{\beta_j}_{\rho_k}$, $\theta^{\rho_l}_{\beta_j}$, $\theta^{\alpha_i}_{\rho_k}$ も同様である。

$\alpha_i[0, s^{\rho_k}_{\alpha_i}] \rhd \xi \rhd \rho_k[f^{\rho_k}_{\alpha_i}, s^{\beta_j}_{\rho_k}] \rhd \xi' \rhd \beta_j[f^{\beta_j}_{\rho_k}, s^{\rho_l}_{\beta_j}] \rhd \xi'' \rhd \rho_l[f^{\rho_l}_{\beta_j}, s^{\alpha_i}_{\rho_l}] \rhd \xi'''$ から α_i への分岐に際して，位相のずれは

$$\begin{aligned}&\theta_{\rho_k}(f^{\rho_k}_{\alpha_i}) - \theta_\xi(f_\xi) + \theta_{\beta_j}(f^{\beta_j}_{\rho_k}) - \theta_{\xi'}(f_{\xi'})\\ &+\theta_{\rho_l}(f^{\rho_l}_{\beta_j}) - \theta_{\xi''}(f_{\xi''}) + \theta_{\alpha_i}(f^{\alpha_i}_{\rho_k}) - \theta_{\xi'''}(f_{\xi'''})\end{aligned}$$

となる。これは

$$\begin{aligned}&\theta^{\rho_k}_{\alpha_i} + \delta\theta_\xi(f_\xi) + \theta^{\beta_j}_{\rho_k} + \delta\theta_{\xi'}(f_{\xi'})\\ &+\theta^{\rho_l}_{\beta_j} + \delta\theta_{\xi''}(f_{\xi''}) + \theta^{\alpha_i}_{\rho_k} + \delta\theta_{\xi'''}(f_{\xi'''})\end{aligned}$$

に等しい。$\delta\theta_\xi(f_\xi) + \delta\theta_{\xi'}(f_{\xi'}) + \delta\theta_{\xi'''}(f_{\xi'''}) + \delta\theta_{\xi'''}(f_{\xi'''}) = x$ となる確率を $w_4(x)$ とすると，$\gamma^\star$ が $(\alpha_i)^\star$ の復元可能な変形である確率は $w_4(-\theta^{\rho_k}_{\alpha_i} - \theta^{\beta_j}_{\rho_k} - \theta^{\rho_l}_{\beta_j} - \theta^{\alpha_i}_{\rho_k})$ である。

これ以降の記述を簡単にするための記号を導入しよう。$\gamma^\star$ が $(\alpha_i)^\star$ の復元可能な変形であるとき，γ を $\alpha_i \multimap^l_k \beta_j$ という記号で表すことにする。

3. 対象の生成と消滅

前節の w_1, w_2, w_4 は，$[-\pi, \pi]$ 上の周期関数である。これらは，周期的軌道間の遷移に際して，それらの軌道を繋げる曲線 ξ, ξ', ξ'', ξ''' のばらつき具合を表す関数で，位相のずれの確率を表すものであった。位相のずれの正負には特別な意味はないこと，位相のずれがない場合の確率が $w_n(0)$ であることから，以下を仮定することは自然なことである。$n = 1, 2, 4$ について，

1. $\forall x$ に対して, $w_n(x) \geq 0$. (非負関数)
2. $\forall x$ に対して, $w_n(-x) = w_n(x)$. (偶関数)
3. $\forall x$ に対して，$w_n(0) \geq w_n(x)$. (0 で最大値)

ξ, ξ', ξ'', ξ''' を完全に制御できてばらつかない場合は，$\delta\theta_{\xi}(f_{\xi})$，$\delta\theta_{\xi'}(f_{\xi'})$，$\delta\theta_{\xi'''}(f_{\xi'''})$，$\delta\theta_{\xi'''}(f_{\xi'''})$ はすべて 0 になる。この場合，$w_4(x) = \delta_{x,1}$ となる。ξ, ξ', ξ'', ξ''' が完全に制御できずにばらつくようになっていく場合に，$x = 0$ で最大値をとる非負の関数 $w(x)$ があって

$$w_4(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ w(x), & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} \tag{13}$$

のように書けるであろう。

このように $\mathrm{supp}\ w_4 \subseteq [-\pi/2, \pi/2]$ である場合，$\alpha_i \triangleright \xi \triangleright \rho_k \triangleright \xi' \triangleright \beta_j \triangleright \xi'' \triangleright \rho_l \triangleright \xi''' \triangleright \alpha_i$ が α_i の復元可能な変形 $\alpha_i {\multimap}^l_k \beta_j$ にはならない場合もありうることになる。このような場合でも，以下に述べるように $\alpha_i \triangleright \xi \triangleright \rho_k \triangleright \xi' \triangleright \beta_j \triangleright \xi'' \triangleright \rho_l \triangleright \xi''' \triangleright \alpha_i$ に物理的な意味を持たせることは可能である。

問題としている対象と同種のものが存在するが，何らかの理由で測定器に反応しない等の理由でその存在が無視されている可能性はある。そういった同種のもので埋め尽くされている海のようなものを考えたとき，それらのものの一つが測定可能なものになったとき，測定できないものの海に穴が生ずる。この穴をホールと呼ぶことにすると，測定可能な対象とホールが対生成されることになる。

β_j でこの対生成が生じた場合，対象は $\beta_j[c, s^{\rho_l}_{\beta_j}] \triangleright \xi'' \triangleright \rho_l[f^{\rho_l}_{\beta_j}, s^{\alpha_i}_{\rho_l}] \triangleright \xi''' \triangleright \alpha_i[f^{\alpha_i}_{\rho_l}, T_{\alpha_i}]$ に沿って状態を変えていく。

一方，ホールは，測定不可能な対象と同種のものの海に生じた欠損なので，対象の運動に対して時間を遡るような運動をするであろう。$\beta_j : [0, T_{\beta_j}] \to Q$ に対して，$\tilde{\beta}_j : [-T_{\beta_j}, 0] \to Q$ を

$$\tilde{\beta}_j(t) := \beta_j(-t) \tag{14}$$

と定義すると，ホールは $\tilde{\beta}_j$ に沿って状態を変化させることになる。ホールは，$\tilde{\beta}_j[\tilde{c}, \tilde{s}^{\rho_k}_{\beta_j}] \triangleright \tilde{\xi}' \triangleright \tilde{\rho}_k[\tilde{f}^{\rho_k}_{\beta_j}, \tilde{s}^{\alpha_i}_{\rho_k}] \triangleright \tilde{\xi} \triangleright \tilde{\alpha}_i[\tilde{f}^{\alpha_i}_{\rho_k}, 0]$ に沿って状態が変化していくとしよう。

この対生成の軌道達を，$\beta_j \hookrightarrow^l_k \alpha_i$ という記号で表すことにする。

$\beta_j(c)$ において対象とホールが対生成されたとすると，ホールは $\theta_{\tilde{\beta}_j}(\tilde{c}) = \theta_{\beta_j}(c) - \pi$ となる状態 $\beta_j(\tilde{c})$ に生ずるであろう。というのは，2π だけ位相がずれた状態は，ホールではなく対象がそこに存在するかもしれない状態で，我々はその状態に対象があるかないかを制御できないとしているのだから，そこから最も遠い状態というのが位相が $\pm\pi$ だけずれた状態であると考えられるからである。

ホールは対象の軌道を時間を逆に辿るので，ホールの軌道 $\tilde{\beta}_j[\tilde{c}, \tilde{s}^{\rho_k}_{\beta_j}] \triangleright \tilde{\xi}' \triangleright \tilde{\rho}_k[\tilde{f}^{\rho_k}_{\beta_j}, \tilde{s}^{\alpha_i}_{\rho_k}] \triangleright \tilde{\xi} \triangleright \tilde{\alpha}_i[\tilde{f}^{\alpha_i}_{\rho_k}, 0]$ に対して，それを時間を逆向きに辿る対象の軌道が存在するはずである。それは，$\alpha_i[0, s^{\rho_k}_{\alpha_i}] \triangleright \xi \triangleright \rho_k[f^{\rho_k}_{\alpha_i}, s^{\beta_j}_{\rho_k}] \triangleright \xi' \triangleright \beta_j[f^{\beta_j}_{\rho_k}, -\tilde{c}]$ である。

$$\tilde{c} = -c \tag{15}$$

であれば，

$$\begin{aligned} \gamma \ := \ & \alpha_i[0, s^{\rho_k}_{\alpha_i}] \triangleright \xi \triangleright \rho_k[f^{\rho_k}_{\alpha_i}, s^{\beta_j}_{\rho_k}] \\ & \triangleright \xi' \triangleright \beta_j[f^{\beta_j}_{\rho_k}, -\tilde{c}] \triangleright \beta_j[c, s^{\rho_l}_{\beta_j}] \\ & \triangleright \xi'' \triangleright \rho_l[f^{\rho_l}_{\beta_j}, s^{\alpha_i}_{\rho_l}] \triangleright \xi''' \\ & \triangleright \alpha_i[f^{\alpha_i}_{\rho_l}, T_{\alpha_i}] \end{aligned}$$

は α_i の変形になる。その $U(1)$-リフトについては，$\beta_j[f^{\beta_j}_{\rho_k}, -\tilde{c}]$ から $\beta_j[c, s^{\rho_l}_{\beta_j}]$ へ接続されるとき，位相が $\theta_{\beta_j}(c) - \theta_{\tilde{\beta}_j}(\tilde{c}) = \pi$ だけ変化する。従って，最後に α_i に分岐するときの位相の差は，

$$
\begin{aligned}
&\theta^{\rho_k}_{\alpha_i} + \delta\theta_{\xi}(f_{\xi}) + \theta^{\beta_j}_{\rho_k} + \delta\theta_{\xi'}(f_{\xi'}) + \pi \\
&+\theta^{\rho_l}_{\beta_j} + \delta\theta_{\xi''}(f_{\xi''}) + \theta^{\alpha_i}_{\rho_k} + \delta\theta_{\xi'''}(f_{\xi'''})
\end{aligned}
$$

となる。

$\delta\theta_{\xi}(f_{\xi}) + \delta\theta_{\xi'}(f_{\xi'}) + \delta\theta_{\xi'''}(f_{\xi'''}) + \delta\theta_{\xi'''}(f_{\xi'''}) = x$ となる確率を $w_4(x)$ とすると，$\gamma^{\star}$ が $(\alpha_i)^{\star}$ の復元可能な変形である確率は $w_4(-\theta^{\rho_k}_{\alpha_i} - \theta^{\beta_j}_{\rho_k} - \theta^{\rho_l}_{\beta_j} - \theta^{\alpha_i}_{\rho_k} - \pi)$ である。これは，対生成によって $\beta_j \hookrightarrow^l_k \alpha_i$，すなわち $\beta_j[c, s^{\rho_l}_{\beta_j}] \rhd \xi'' \rhd \rho_l[f^{\rho_l}_{\beta_j}, s^{\alpha_i}_{\rho_l}] \rhd \xi''' \rhd \alpha_i[f^{\alpha_i}_{\rho_l}, T_{\alpha_i}]$ と $\tilde{\beta}_j[\tilde{c}, \tilde{s}^{\rho_k}_{\beta_j}] \rhd \tilde{\xi}' \rhd \tilde{\rho}_k[\tilde{f}^{\rho_k}_{\beta_j}, \tilde{s}^{\alpha_i}_{\rho_k}] \rhd \tilde{\xi} \rhd \tilde{\alpha}_i[\tilde{f}^{\alpha_i}_{\rho_k}, 0]$ が生ずる確率を表している。

$(\alpha_i)^{\star}$ の復元可能な変形 $\alpha_i \multimap^{l'}_{k'} \beta_j$ が生じようとするときに，この対生成 $\beta_j \hookrightarrow^l_k \alpha_i$ が生じた場合，α_i から分岐した対象は，$\tilde{\beta}_j[\tilde{c}, \tilde{s}^{\rho_k}_{\beta_j}] \rhd \tilde{\xi}' \rhd \tilde{\rho}_k[\tilde{f}^{\rho_k}_{\beta_j}, \tilde{s}^{\alpha_i}_{\rho_k}] \rhd \tilde{\xi} \rhd \tilde{\alpha}_i[\tilde{f}^{\alpha_i}_{\rho_k}, 0]$ に沿って変化するホールに落ち込んで測定不可能になる，つまりホールと対消滅する。そして，対生成した同種の対象は $\beta_j[c, s^{\rho_l}_{\beta_j}] \rhd \xi'' \rhd \rho_l[f^{\rho_l}_{\beta_j}, s^{\alpha_i}_{\rho_l}] \rhd \xi''' \rhd \alpha_i[f^{\alpha_i}_{\rho_l}, T_{\alpha_i}]$ に沿って変化するので，最初に存在した対象は β_j に至ることなく対生成した同種の対象と入れ替わって α_i に直ちに戻ることになり，$\underline{\beta}$ の測定結果は得られない。

対象の入れ替わりがあっても，状態は周期的軌道に復帰するので，この復元可能な変形を $\alpha_i \multimap^{l'}_{k'} \beta_j \hookrightarrow^l_k \alpha_i$ という記号で表すことにしよう。

4．分岐の確率

α_i から β_j に分岐する重み（確率に比例する量）を $l(\beta_j|\alpha_i)$ で表す。

任意の測定の文脈 $\underline{\alpha}$，$\underline{\beta}$ について，$\alpha_i \in \underline{\alpha}$，$\beta_j \in \underline{\beta}$ に対して

- $l(\beta_j|\alpha_i) \geq 0$;
- $\sum_{j=1}^{n} l(\beta_j|\alpha_i)^2 = 1$;
- $l(\alpha_i|\beta_j) = l(\beta_j|\alpha_i)$

を満たすものであるとする。

更に

$$\theta^{\beta_j}_{\alpha_i} = -\theta^{\alpha_i}_{\beta_j} \tag{16}$$

を満たすものとする。

$$\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l) := \theta^{\rho_k}_{\alpha_i} + \theta^{\beta_j}_{\rho_k} + \theta^{\rho_l}_{\beta_j} + \theta^{\alpha_i}_{\rho_l} \tag{17}$$

と置こう。$\alpha_i \multimap^l_k \beta_j$ が生ずる確率は

$$w_4(\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l))l(\rho_k|\alpha_i)l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_l|\beta_j)l(\alpha_i|\rho_l)$$

に比例する。

$$\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l) = \theta^{\rho_k}_{\alpha_i} + \theta^{\beta_j}_{\rho_k} - \theta^{\beta_j}_{\rho_l} - \theta^{\rho_l}_{\alpha_i}$$

であるから，

$$\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(l,k) = -\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l), \tag{18}$$

$$\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,k) = 0 \tag{19}$$

が成り立つ。また，

$$\Delta\theta^{\alpha_i}_{\beta_j}(k,l) = \Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(l,k)$$

であるので，

$$\Delta\theta^{\alpha_i}_{\beta_j}(k,l) = -\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l), \tag{20}$$

$$\Delta\theta^{\alpha_i}_{\alpha_i}(k,l) = 0 \tag{21}$$

が成り立つ。

$$I_+(\beta_j|\alpha_i) := \left\{(k,l)\middle|\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \mathrm{mod} 2\pi\right\}, \tag{22}$$

$$I_-(\beta_j|\alpha_i) := \left\{(k,l)\middle|\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l) \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \mathrm{mod} 2\pi\right\} \tag{23}$$

と定義する。

$\alpha_i \multimap^l_k \beta_j$ の型の復元可能な変形の総数は，

$$
\begin{aligned}
&N_+(\beta_j|\alpha_i)\\
&=\sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} w_4(-\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l))l(\rho_k|\alpha_i)l(\beta_j|\rho_k)\\
&\qquad\times l(\rho_l|\beta_j)l(\alpha_i|\rho_l) \qquad (24)
\end{aligned}
$$

である。

$\beta_j \hookrightarrow^l_k \alpha_i$ の型の対生成の総数は，

$$
\begin{aligned}
&N_-(\beta_j|\alpha_i)\\
&=\sum_{(k,l)\in I_-(\beta_j|\alpha_i)} w_4(-\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)-\pi)l(\rho_k|\alpha_i)l(\beta_j|\rho_k)\\
&\qquad\times l(\rho_l|\beta_j)l(\alpha_i|\rho_l) \qquad (25)
\end{aligned}
$$

である。

$-\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l) \notin (-\pi/2,\pi/2) \pmod{2\pi}$ なので，$-\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l)-\pi \in (-\pi/2,\pi/2) \pmod{2\pi}$ である。

$$
v_4(x) := \begin{cases} -w(x+\pi), & x\in[-\pi,-\frac{\pi}{2}],\\ w(x), & x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\\ -w(x-\pi), & x\in[\frac{\pi}{2},\pi] \end{cases} \qquad (26)
$$

と定義すると，v_4 は周期 2π の周期関数で，

$$
\begin{aligned}
&N_-(\beta_j|\alpha_i)\\
&=-\sum_{(k,l)\in I_-(\beta_j|\alpha_i)} v_4(-\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l))l(\rho_k|\alpha_i)l(\beta_j|\rho_k)\\
&\qquad\times l(\rho_l|\beta_j)l(\alpha_i|\rho_l) \qquad (27)
\end{aligned}
$$

と書ける。

$(k',l') \in I_+(\beta_j|\alpha_i)$ に対して，$(k,l) \in I_-(\beta_j|\alpha_i)$ として，$\alpha_i \multimap^{l'}_{k'} \beta_j \hookrightarrow^l_k \alpha_i$ の型の打ち消しが生ずる確率は，

$$
\frac{N_-(\beta_j|\alpha_i)}{N_+(\beta_j|\alpha_i)} \qquad (28)
$$

であると仮定しよう。

α_i の変形として $\{\alpha_i \multimap^{l'}_{k'} \beta_j : (k',l') \in I_+(\beta_j|\alpha_i)\}$ が生じるであろう確率は

$$
N_+(\beta_j|\alpha_i) \qquad (29)
$$

に比例すると仮定しよう。$B=b_j$ という測定結果が得られる確率は，対生成 $\beta_j \hookrightarrow^l_k \alpha_i$ によって打ち消される場合を除いたものになるので，

$$
\begin{aligned}
&N_+(\beta_j|\alpha_i)\left(1-\frac{N_-(\beta_j|\alpha_i)}{N_+(\beta_j|\alpha_i)}\right)\\
&=N_+(\beta_j|\alpha_i)-N_-(\beta_j|\alpha_i) \qquad (30)
\end{aligned}
$$

に比例する。

これは v_4 を使って次のように書ける。

$$
\begin{aligned}
&N_+(\beta_j|\alpha_i)-N_-(\beta_j|\alpha_i)\\
&=\sum_{(k,l)\in I_+(\beta_j|\alpha_i)} v_4(-\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l))l(\rho_k|\alpha_i)l(\beta_j|\rho_k)\\
&\qquad\times l(\rho_l|\beta_j)l(\alpha_i|\rho_l) \qquad (31)\\
&+\sum_{(k,l)\in I_-(\beta_j|\alpha_i)} v_4(-\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l))l(\rho_k|\alpha_i)l(\beta_j|\rho_k)\\
&\qquad\times l(\rho_l|\beta_j)l(\alpha_i|\rho_l) \qquad (32)\\
&=\sum_{k,l=1}^{n} v_4(-\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l))l(\rho_k|\alpha_i)l(\beta_j|\rho_k)\\
&\qquad\times l(\rho_l|\beta_j)l(\alpha_i|\rho_l). \qquad (33)
\end{aligned}
$$

5．理想的な実験と量子力学的純粋状態

前節で導入した v_4 は周期 2π の周期関数なので，Fourier 級数に展開できる。$v_4(-x)=v_4(x)$，すなわち偶関数でもあったので，c_m を展開係数として

$$
v_4(x)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m\cos(mx) \qquad (34)
$$

となる。v_4 は実数値関数なので，$c_m\in\mathbb{R}$ である。

これを代入すると，$B=b_j$ が得られる確率は，

$$
\begin{aligned}
&N_+(\beta_j|\alpha_i)-N_-(\beta_j|\alpha_i)\\
&=\sum_{m=0}^{\infty} c_m \sum_{k,l=1}^{n}\cos(-m\Delta\theta^{\beta_j}_{\alpha_i}(k,l))l(\rho_k|\alpha_i)\\
&\qquad\times l(\beta_j|\rho_k)l(\rho_l|\beta_j)l(\alpha_i|\rho_l) \qquad (35)
\end{aligned}
$$

に比例することになる。

これは，

$$
\begin{aligned}
& c_0 \sum_{k,l=1}^{n} l(\rho_k|\alpha_i) \\
& \qquad \times l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_l|\beta_j) l(\alpha_i|\rho_l) \\
& + c_1 \sum_{k,l=1}^{n} \cos(-\Delta\theta_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)) l(\rho_k|\alpha_i) \\
& \qquad \times l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_l|\beta_j) l(\alpha_i|\rho_l) \\
& + c_2 \sum_{k,l=1}^{n} \cos(-2\Delta\theta_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)) l(\rho_k|\alpha_i) \\
& \qquad \times l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_l|\beta_j) l(\alpha_i|\rho_l) \\
& + \sum_{m=3}^{\infty} c_m \sum_{k,l=1}^{n} \cos(-m\Delta\theta_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)) l(\rho_k|\alpha_i) \\
& \qquad \times l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_l|\beta_j) l(\alpha_i|\rho_l) \\
& = c_0 \left(\sum_{k=1}^{n} l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_k|\alpha_i) \right)^2 \qquad (36) \\
& + c_1 \sum_{k,l=1}^{n} \cos(-\Delta\theta_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)) l(\rho_k|\alpha_i) \\
& \qquad \times l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_l|\beta_j) l(\alpha_i|\rho_l) \qquad (37) \\
& + c_2 \sum_{k,l=1}^{n} \cos(-2\Delta\theta_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)) l(\rho_k|\alpha_i) \\
& \qquad \times l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_l|\beta_j) l(\alpha_i|\rho_l) \qquad (38) \\
& + \sum_{m=3}^{\infty} c_m \sum_{k,l=1}^{n} \cos(-m\Delta\theta_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)) l(\rho_k|\alpha_i) \\
& \qquad \times l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_l|\beta_j) l(\alpha_i|\rho_l) \qquad (39)
\end{aligned}
$$

に等しい。

(37) は次のように書き換えられる。

$$
\begin{aligned}
& c_1 \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{i\Delta\theta_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)} + \mathrm{e}^{-i\Delta\theta_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)}}{2} l(\rho_k|\alpha_i) \\
& \qquad \times l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_l|\beta_j) l(\alpha_i|\rho_l) \\
& = c_1 \sum_{k,l=1}^{n} \mathrm{e}^{i\Delta\theta_{\alpha_i}^{\beta_j}(k,l)} l(\rho_k|\alpha_i) \\
& \qquad \times l(\beta_j|\rho_k) l(\rho_l|\beta_j) l(\alpha_i|\rho_l) \\
& = c_1 \sum_{k,l=1}^{n} \mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_k}} l(\rho_k|\alpha_i) \mathrm{e}^{i\theta_{\rho_k}^{\beta_j}} l(\beta_j|\rho_k) \\
& \qquad \times \mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j}^{\rho_l}} l(\rho_l|\beta_j) \mathrm{e}^{i\theta_{\rho_k}^{\alpha_i}} l(\alpha_i|\rho_l) \\
& = c_1 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_k}} l(\rho_k|\alpha_i) \mathrm{e}^{-i\theta_{\beta_j}^{\rho_k}} l(\beta_j|\rho_k) \\
& \qquad \times \sum_{l=1}^{n} \mathrm{e}^{i\theta_{\beta_j}^{\rho_l}} l(\beta_j|\rho_l) \mathrm{e}^{-i\theta_{\alpha_i}^{\rho_k}} l(\rho_l|\alpha_i) \\
& = c_1 \left| \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-i\theta_{\beta_j}^{\rho_k}} l(\beta_j|\rho_k) \mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_k}} l(\rho_k|\alpha_i) \right|^2 .
\end{aligned}
$$

ここで，複素 n 次元ベクトル $|\alpha_i\rangle$ を次のように定義しよう。

$$
|\alpha_i\rangle := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_1}} l(\rho_1|\alpha_i) \\ \mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_2}} l(\rho_2|\alpha_i) \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_n}} l(\rho_n|\alpha_i) \end{pmatrix} . \qquad (40)
$$

ここで，複素 n 次元ベクトル $|\beta_j\rangle$ も同様に定義すると，その双対ベクトルの $\langle\beta_j|$ は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
& \langle\beta_j| \\
& = \left(\mathrm{e}^{-i\theta_{\beta_j}^{\rho_1}} l(\beta_j|\rho_1), \mathrm{e}^{-i\theta_{\beta_j}^{\rho_2}} l(\beta_j|\rho_2), \right. \\
& \qquad \left. \cdots, \mathrm{e}^{-i\theta_{\beta_j}^{\rho_n}} l(\beta_j|\rho_n) \right) . \qquad (41)
\end{aligned}
$$

すると (37) は，

$$
c_1 \left| \langle\beta_j|\alpha_i\rangle \right|^2 \qquad (42)
$$

となる。この式は係数 c_1 を除くと量子力学において確率解釈される式と同じであるので，複素 n 次元ベクトル $|\alpha_i\rangle$ を量子力学的状態と呼ぶことにする。

同様にして，(38) は次のように書き換えられる。

$$
\begin{aligned}
& c_2 \left| \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-2i\theta_{\beta_j}^{\rho_k}} l(\beta_j|\rho_k) \mathrm{e}^{2i\theta_{\alpha_i}^{\rho_k}} l(\rho_k|\alpha_i) \right|^2 \\
& = c_2 \left| \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{i(\theta_{\alpha_i}^{\rho_k} - \theta_{\beta_j}^{\rho_k})} \mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_k}} l(\rho_k|\alpha_i) \right. \\
& \qquad \left. \times \mathrm{e}^{-i\theta_{\beta_j}^{\rho_k}} l(\beta_j|\rho_k) \right|^2 .
\end{aligned}
$$

ここで，複素 n 次元ベクトル $\left|\alpha_i^{(2:\beta_j)}\right\rangle$ を次のように定義しよう。

$$\left|\alpha_i^{(2:\beta_j)}\right\rangle := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i(\theta_{\alpha_i}^{\rho_1}-\theta_{\beta_j}^{\rho_1})}\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_1}}l(\rho_1|\alpha_i) \\ \mathrm{e}^{i(\theta_{\alpha_i}^{\rho_2}-\theta_{\beta_j}^{\rho_2})}\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_2}}l(\rho_2|\alpha_i) \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{i(\theta_{\alpha_i}^{\rho_n}-\theta_{\beta_j}^{\rho_n})}\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_n}}l(\rho_n|\alpha_i) \end{pmatrix}. \tag{43}$$

すると，(38) は次のように書き換えられる。

$$c_2\left|\langle\beta_j|\alpha_i^{(2:\beta_j)}\rangle\right|^2. \tag{44}$$

$\left|\alpha_i^{(2:\beta_j)}\right\rangle$ の解釈としては，B の測定の文脈 $\underline{\beta}$ において，測定作業の影響を受けて対象の量子力学的状態が $|\alpha_i\rangle$ から $\left|\alpha_i^{(2:\beta_j)}\right\rangle$ に変化してしまったと解釈できる。$m=3,4,\cdots$ に関しても同様にできる。

$$\left|\alpha_i^{(m:\beta_j)}\right\rangle := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i(m-1)(\theta_{\alpha_i}^{\rho_1}-\theta_{\beta_j}^{\rho_1})}\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_1}}l(\rho_1|\alpha_i) \\ \mathrm{e}^{i(m-1)(\theta_{\alpha_i}^{\rho_2}-\theta_{\beta_j}^{\rho_2})}\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_2}}l(\rho_2|\alpha_i) \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{i(m-1)(\theta_{\alpha_i}^{\rho_n}-\theta_{\beta_j}^{\rho_n})}\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_n}}l(\rho_n|\alpha_i) \end{pmatrix}. \tag{45}$$

$m=0$ については，

$$\left|\alpha_i^{(0:\beta_j)}\right\rangle := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i(\theta_{\alpha_i}^{\rho_1}-\theta_{\beta_j}^{\rho_1})}\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_1}}l(\rho_1|\alpha_i) \\ \mathrm{e}^{-i(\theta_{\alpha_i}^{\rho_2}-\theta_{\beta_j}^{\rho_2})}\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_2}}l(\rho_2|\alpha_i) \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{-i(\theta_{\alpha_i}^{\rho_n}-\theta_{\beta_j}^{\rho_n})}\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_n}}l(\rho_n|\alpha_i) \end{pmatrix} \tag{46}$$

である。

α_i に準備した対象について $B=b_j$ という測定結果が得られる確率は

$$\begin{aligned} &N_+(\beta_j|\alpha_i)-N_-(\beta_j|\alpha_i) \\ &= c_0\left|\langle\beta_j|\alpha_i^{(0:\beta_j)}\rangle\right|^2 \\ &+c_1\left|\langle\beta_j|\alpha_i\rangle\right|^2 \\ &+c_2\left|\langle\beta_j|\alpha_i^{(2:\beta_j)}\rangle\right|^2 \\ &+\sum_{m=3}^{\infty}c_m\left|\langle\beta_j|\alpha_i^{(m:\beta_j)}\rangle\right|^2 \end{aligned}$$

に比例すると書くことができる。

c_m は $w(x)$，すなわち ξ,ξ',ξ'',ξ''' のばらつき方に依存して定まるものであった。理想的な測定実験とは何かといえば，c_1 を除いてすべて $c_m=0$ ということである。すなわち，$w(x)=\cos x$ の場合である。なぜかと言うと，$c_m\geq 0$ であるような範囲で ξ,ξ',ξ'',ξ''' がばらつくように制御された実験が行われるならば，

$$\sigma=\sum_{m=1}^{\infty}c_m\left|\alpha_i^{(m:\beta_j)}\right\rangle\left\langle\alpha_i^{(m:\beta_j)}\right| \tag{47}$$

という量子力学的混合状態を使って，$B=b_j$ を得る確率 $(N_+(\beta_j|\alpha_i)-N_-(\beta_j|\alpha_i))$ / $(\sum_{j'=1}^{n}(N_+(\beta_{j'}|\alpha_i)-N_-(\beta_{j'}|\alpha_i)))$ は

$$\mathrm{Tr}\,(\sigma|\beta_j\rangle\langle\beta_j|) \tag{48}$$

と表すことができる。理想的な実験では，量子力学的純粋状態が準備されるように行われるので，c_1 のみが 0 ではない σ が準備されるはずだからである。

6．結論と考察

2.4 節で見たように，$\alpha_i\rhd\xi\rhd\beta_j\rhd\xi'\rhd\alpha_i$ の $U(1)$-リフトは，$\theta_{\alpha_i}^{\beta_k}=-\theta_{\beta_k}^{\alpha_i}$ としたことから，$(\alpha_i)^\star$ の復元可能な変形である。この復元可能な変形により $B=b_j$ となる確率は

$$w_2(0)l(\beta_j|\alpha_i)l(\alpha_i|\beta_j)=w_2(0)l(\beta_j|\alpha_i)^2 \tag{49}$$

に比例する。$l(\beta_j|\alpha_i)$ に課した条件から，

$$\sum_{j=1}^{n}l(\beta_j|\alpha_i)^2=1$$

というように正規化されていることに注意しよう。

理想的な実験で生じる $(\alpha_i)^\star$ の復元可能な変形 $\alpha_i\multimap_{k'}^{l'}\beta_j$ により得られる $B=b_j$ となる確率 $|\langle\beta_j|\alpha_i\rangle|^2$ と $\alpha_i\rhd\xi\rhd\beta_j\rhd\xi'\rhd\alpha_i$ という変形で得られる確率 $l(\beta_j|\alpha_i)^2$ は，ともに復元可能な変形によるものであるから，一致するはずである。これは次の等式が成り立つことを意味する：

$$l(\beta_j|\alpha_i)^2 = \left|\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-i\theta_{\beta_j}^{\rho_k}} l(\beta_j|\rho_k) \mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_k}} l(\rho_k|\alpha_i)\right|^2 . \tag{50}$$

これが成り立つための十分条件は

$$\mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\beta_j}} l(\beta_j|\alpha_i) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-i\theta_{\beta_j}^{\rho_k}} l(\beta_j|\rho_k) \mathrm{e}^{i\theta_{\alpha_i}^{\rho_k}} l(\rho_k|\alpha_i) \tag{51}$$

である。これは複素 n 次元ベクトル $|\alpha_i\rangle$ 等だけで確率の計算を可能にする重要な関係式である。復元可能な変形を区別する実験や理想的ではない実験では，この関係式は成り立たないことが示されたのだから，量子力学的現象の実験というものは理想的で復元可能な変形は区別しない実験であると言うことができる。

量子力学的純粋状態は周期的軌道であるという解釈には，二重スリットによる干渉現象を示唆するものがある。二重スリットの干渉実験では，片方のスリットだけが開かれている場合にスクリーンに到達する量子力学的粒子の分布には干渉縞は現れないが，両方のスリットを開けた場合には干渉縞が生じ，スクリーン上で粒子が到達しづらくなる位置が生ずることになる。一方のスリットが開かれているとき粒子が到達したスクリーンの位置に，もう一方のスリットが開かれることが原因となって，その粒子が到達しなくなるというのは理解しづらいことと考えられる。というのは，両方のスリットが開かれるということは，スクリーンに到達する粒子の可能性が増すのであって，減ることはないと考えられるからである。ところが，我々のように周期的軌道であるという条件を満たさないといけないとするならば，両方のスリットが開かれることが粒子の到達する可能性が増すことになるとは限らないことになる。スリットを通過する粒子は放射状に広がるため，周期的な軌道にならないが，スリットを通過した粒子を集めてスリットの入り口に導く装置を追加することで周期的な軌道を一筆書きで描かせることができるであろう。例えば，光の場合なら，光ファイバーなどで光の経路を自由に曲げることができる。そうした場合，スリットが一つしか開かれていない場合にそこを通過してスクリーンに到達する粒子は，スリットが二つ開かれると，今度は開かれたスリットの方を通過する可能性が生ずるが，その場合に最初に開かれていたスリットを通過する軌道が曲げられることになり，その粒子は最初のスリットが開かれていた場合に到達したスクリーンの場所を通らないことになり，干渉縞が生ずる可能性が出てくるのである。

復元可能な変形という概念を $U(1)$-リフトが元の軌道上では一致するとして定式化した。この $U(1)$ の自由度は，対象に特有の属性に関わるものではなく，測定実験において制御できる状態の特定という意味しかなかった。従って，2 粒子からなる対象については，各々の粒子ごとに $U(1)$ の自由度が存在するとは限らず，2 粒子 の場合のみ意味がある自由度である。Q 内の周期的軌道を一つの粒子の状態に射影してそれの $U(1)$-リフトを考えても，もとの $U(1)$-リフトの位相とは一般には一致しないからである。

Bell の不等式の破れが示唆する非局所性の議論では，測定の過程において準備された 2 粒子が常に測定されるということが暗黙の前提となっている。一方の粒子に関してだけ測定を行うとき，$\alpha_i \multimap^{l'}_{k'} \beta_j \hookrightarrow^{l}_{k} \alpha_i$ のような測定されない場合が生じ得るが，この場合はもはや 2 粒子が測定可能という前提が破れることになる。それゆえに，Bell の不等式の破れは非局所性を意味せず，局所的実在の存在の余地がある。

参考文献

[1] 内山　智, “量子力学的状態について”, 北星学園大学短期大学部北星論集, **10**, 59–65 (2012).

[2] S. Uchiyama, “Local Reality: Can It Exist in the EPR–Bohm Gedanken Experiment?”, *Found. Phys.* , **25** (1995) 1561–1575.

[3] 内山　智, “均衡原理と量子力学的確率”, 北星学園大学短期大学部北星論集, **9**, 33–41 (2011).

[4] 内山　智, “均衡原理に基づく量子力学的過程による複合系の取り扱い”, 北星学園大学短期大学部北星論集, **10**, 13–21 (2012).

[5] 内山　智, “量子力学的過程の測定結果の非局所性について”, 北星学園大学短期大学部北星論集, **11**, 67–70 (2013).

[6] 内山　智, “量子力学的過程における局所性について”, 北星学園大学短期大学部北星論集, **12**, 37–44 (2014).

[7] 内山　智, “量子力学的状態の周期的軌道としての解釈”, 北星学園大学短期大学部北星論集, **13**, 81–86 (2015).