

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 17 日現在

機関番号：30106

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008 ～ 2012

課題番号：20540148

研究課題名（和文） 重み付き多変数 Hardy 空間の研究

研究課題名（英文） Researches of weighted several variable Hardy spaces

研究代表者

中路 貴彦 (NAKAZI TAKAHIKO)

北星学園大学・経済学部・教授

研究者番号：30002174

研究成果の概要（和文）：

重み付き多変数 Hardy 空間を主として次の三つの立場から研究し、それぞれ一定の成果をあげた。(1) 予測理論、(2) 特異積分作用素の理論、(3) 正則関数の境界値

予測理論としては、予測誤差を円板上でいくつかの重みについて決定した。特異積分作用素としては重みが Helson-Szegő の条件を満足するとき、重みの付かない場合の結果を応用した。正則関数の境界値としては、一変数で知られていた結果を多変数へ拡張した。

研究成果の概要（英文）：

We studied weighted several variable Hardy spaces mainly in the following three situations. (1) prediction theory, (2) singular integral operator theory, (3) nonnegative boundary values of functions on weighted Hardy spaces.

For (1), we give the prediction errors for several typical weights in the unit disc. For (2), we estimate the essential norm of a singular integral operator using known nonweighted result. For (3), we extended one variable case to several variable case.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：基礎解析学

科研費の分科・細目：基盤研究（C）

キーワード：Hardy空間、Toeplitz作用素、不変部分空間、多変数、重み付き Toeplitz作用素

1. 研究開始当初の背景

(1) 定数1を定数部分のない多項式で近似する問題は単位円周上では、重みの付かないときにはその誤差は明らかに1である。重みが付いたときは、Szegőによって1920年に、その誤差は重みの幾何平均で与えられる事が示された。この美しい定理をWienerは定常確率過程の予測問題へ応用した。後に、これは予測理論における強力な道具となった。

またこの非常に有名な定理は、様々な分野へ一般化された。一変数のときは、単位円周の代わりに一般領域の境界で考え、Gamelin, Ahlfors-Sarason等により一般化された。多変数への一般化は著者による部分的な結果だけであり、一変数のとき円板上でも、多くの数学者によって誤差がゼロかゼロではないかについて、様々の重要な結果が得られてきた。これは作用素論の不変部分空間の存在定理と深く関係している。しかしその誤差を正確に与えることはされていない。

(2) 特異積分作用素とは、ここではCauchyタイプの積分作用素を考えるが、掛算作用素とHilbert transformを用いて表現できる。Gohberg等によりその可逆性や、スペクトルについて多くの研究がある。

この特異積分作用素は、アメリカを中心に、さかんに研究されているHankel作用素やToeplitz作用素と深く関係している。それらは主として重みが付かない場合であるが、円周上におけるToeplitz作用素のノルムと本質的ノルムについてはHartman-Wintnerの定理がある。円周上のHankel作用素のノルムについてはNehariの有名な定理があるが、本質的ノルムについてはAdamiyan-Arov-Kreinの定理がある。

特異積分作用素のノルムについては、Nakazi-Yamamotoのシンボルを用いた正確な表現がある。これはNehariの定理と深く関係している。また本質的ノルムについてはNakaziの結果があるが、これはAdamiyan-Arov-Kreinの定理と関係している。重みが付いたときは、Feldman-Krupnik-Markusの結果であるが、シンボルが定数のときのみである。

(3) 重み付き多変数Hardy空間の境界値で非負となるものについては、 H_1 のときは、一変数の場合は古典的で、Macintyre-Rogosinski, deLeeuw-Rudin等があるが、著者が、deLeeuw-Rudinによって残された問題を解決し、有限次元のときはすんでいる。多変数の場合は著者による部分的な結果や、YabutaとHasumiによる部分的な結果のみ

が知られている。

$H_{1/2}$ のときは、一変数の場合のみ研究された事がある。基本的なものは、重みが付かないときに、非負境界値をもつ関数は定数に限ることを示しているNeuwirth-Newmanの結果がある。重みが1次多項式の絶対値のときに、Helson-Sarasonの結果がある。

2. 研究の目的

(1) Szegőの予測定理を円板上で考え、その予測誤差の値を与える。

(2) 特異積分作用素のノルムと本質的ノルムを多変数の場合をこめて、重み付のときに上と下から評価する。

(3) 多変数Hardy空間 H_1 上の極値問題をそのシンボルが境界上で連続なときに解集合を描く。一変数重み付きHardy空間 $H_{1/2}$ の境界上で非負となる関数を一般の重みについて調べる。

3. 研究の方法

(1) Szegőの予測誤差を一般的な関数環で考える。それを一変数の円板上での研究や、多変数のトーラス上での研究へ応用する。また不変部分空間の理論や因数分解定理を用いる。

(2) 特異積分作用素のノルムについて重みが付かない時の結果を用いて、重み付きの場合を評価する。また、多変数の場合はHankel作用素のノルムを用いて評価する。

(3) 一変数の $H_{1/2}$ に対しては、一変数の H_1 の結果との関係を明らかにする。多変数のときは、一変数の H_1 についての結果に着目し、多変数SmirnovクラスについてのGuoの最近の結果を用いる。

4. 研究成果

(1) 予測理論としては、一般の関数環の立場で、Szegőの定理を研究した。これは重み付き抽象Hardy空間における近似の問題の研究に他ならない。Szegőの予測誤差は重みの算術平均と幾何平均の間に位置することを示すことは易しい。

本研究では予測誤差が算術平均と一致する必要十分条件を与えた。また幾何平均と一致する為の十分条件と、必要条件を与え

た。重みが2つの重みの積になっているとき、自然に、重みの算術平均と幾何平均の積が定義できる。それは算術平均と幾何平均の中間に位置する。ここで、それを中間平均と呼ぶ。本研究では予測誤差が中間平均となる自然な十分条件と必要条件を与えた。

これらの予測誤差についての結果を二変数の場合と一変数の場合に応用して、新しい結果を与えた。特に、一変数の場合は円板上で考えているので、元々の円周上の古典的で有名な Szegő の定理と対比すると、興味あると思われる。

(2) 特異積分作用素の理論としては、一変数の場合と多変数を含む非常に一般的な場合に研究した。一変数の場合は、重みの付かないときに、正確にそのノルムと本質的ノルムを与えたことがある。ただ、重みが付いたときは、困難で特殊な場合だけが知られていた。一変数の場合は重みの付かないときに、正確にそのノルムと本質的ノルムを与えたことがある。ただ、重みが付いた時は、困難で特殊な場合だけが知られていた。

本研究では、特異積分作用素のノルムと本質的ノルムをその重みが Helson-Szegő の条件を満たすときに、上と下から知られている重みがないときの結果を用いて、正確に評価した。これは一変数の場合である。

多変数の場合は特異積分作用素についての研究は全くない。本研究ではシンボルが絶対値1のときそのノルムを正確に与えた。ただし Hankel 作用素のノルムを利用している。また一般的なシンボルについては、Hankel 作用素のノルムを用いて、上と下から評価した。この方法はシンボルが有界線形作用素であり、しかも空間が一般の Hilbert 空間である場合にも適用できる。

(3) 正則関数の境界値としては、重み付き多変数 Hardy 空間 H_1 と重み付き一変数 Hardy 空間 $H_{1/2}$ の場合を研究した。 H_1 に属する正則関数の境界値が非負となるものを描くことは、重みが付かない場合の極値問題と深く関係している。だから一変数の場合は昔から研究されていたが、私によってシンボルが連続なときに完全に描かれていた。

よってこの結果を多変数へ一般化する努力をして、解空間が outer 関数を含む時に成功した。 $H_{1/2}$ に属する正則関数の境界値が非負となるものを描くことは、その重みと深く関係している。重みがないときはそんな正則関数は定数以外には存在しないこ

とは知られていた。私はそんな正則関数の空間有限次元となるときの重みを決定した。

多変数 Hardy 空間 H_1 の極値でそのシンボルが連続なときに、もし解集合に *separately outer* な関数を含むならば、一変数のときの完全な analogy が得られることを示した。よって有限次元になる。一変数の重み付き $H_{1/2}$ の非負関数が有限次元となる重みを完全に描いた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

(1) T.Nakazi, Invariant Subspaces of Toeplitz Operators and Uniform Algebras, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 15(2008), 1-8.

(2) T.Nakazi, Hyponormal Toeplitz Operators and Zeros of Polynomials, Proc. Amer. Math. Soc. 136(2008), 2425-2428.

(3) T.Nakazi and T. Yamamoto, Norms and Essential Norms of The Singular Integral Operator with Cauchy Kernel on Weighted Lebesgue Spaces, Integr. Equ. Oper. Theory 68(2010), 101-113.

(4) T.Nakazi, Szegő's Theorem and Uniform Algebras, Canad. Math. Bull. 54(2011), 338-346.

(5) T.Nakazi and T. Yamamoto, An Argument of A Function in $H_{1/2}$, Proc. Ed. Math. Soc. 55(2012), 507-511.

(6) T.Nakazi and T. Yamamoto, Generalized Riesz projections and Toeplitz operators, Math. Inequalities and Appl. 11(2008), 507-528.

(7) T.Nakazi, Multipliers for a quotient Banach space and the Nevanlinna-Pick theorem, International J. of Pure and Appl. Math. 44(2008), 439-446.

(8) T.Nakazi, Interpolation problem for l_1 and an F-space, Nihonkai Math. J. 19(2008), 75-83.

(9) T.Nakazi and M. Seto, Common invariant subspaces of two doubly commuting operators on $l_1 \times C_2$, Nihonkai Math. J. 20(2009), 127-137.

(10) T.Nakazi, A corollary of Alexander's inequality, J. Math. Inequalities 5(2011), 39-42.

(11) T.Nakazi, Multipliers of a wandering subspace for a shift invariant subspace, J. Math. Anal. Appl. 377(2011), 251-252.

(12) T.Nakazi and T.Yamamoto, Three dimensional Q -algebras, Far East J. Math. Sci. 52(2011), 121-148.

(13) T.Nakazi, Weighted interpolation of weighted l_p sequences and Carleson inequality, J. Math. Inequalities 6(2012), 161-166.

(14) T.Nakazi and T.Yamamoto, Three dimensional commutative Banach algebras and Q -algebras, Seminar on Function Spaces 17(2008), 10-15.

(15) T.Nakazi, Functions of the Nevanlinna class on the boundary, Seminar on Function Spaces 17(2008), 73-75.

(16) T.Nakazi, Szegő's theorem and uniform algebras (Application for Bergman space), Seminar on Function Spaces 18(2009), 76-80.

(17) T.Nakazi and T.Yamamoto, An argument of a function in $H^{\{1/2\}}$, Seminar on Function Spaces 19(2010), 44-48.

(18) T.Nakazi, The spectra of Toeplitz operators on the bidisc, Seminar on Function Spaces 19(2010), 101-105.

(19) T.Nakazi, Spectra of some singular integral operators on L^2 with Cauchy kernel, Seminar on Function Spaces 20(2011), 10-13.

(20) T.Nakazi and T.Yamamoto, Norms and essential norms of some singular integral operators on L^2 with Cauchy kernel, Seminar on Function Spaces 20(2011), 14-19.

(21) T.Nakazi and T.Yamamoto, Normal singular integral operators with Cauchy

kernel on L^2 , Seminar on Function Spaces 21(2012), 4-7.

(22) T.Nakazi, Extremal problems in H^1 for continuous kernels on a bidisc, Seminar on Function Spaces 21(2012), 8-11.

[雑誌論文] (計 22 件)

[学会発表] (計 15 件)

[図書] (計 2 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中路 貴彦 (NAKAZI TAKAHIKO)

北星学園大学・経済学部・教授

研究者番号：30002174

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：