研究ノート

量子力学的状態の周期的軌道としての解釈

内 山 智
Satoshi UCHIYAMA

目次

[Abstract]
An Interpretation of Quantum-mechanical States As Periodic Trajectories

A hidden variable model is proposed under such an interpretation that a quantum-mechanical state corresponds to a periodic trajectory in a classical phase space. In this model, a parameter that is the angle variable of the periodic trajectory corresponds to the phase factor of the corresponding wave function. During the measurement process of each physical quantity, the physical system is influenced by its environment, including the measuring apparatus, and the prepared periodic trajectory is deformed. In this model, this deformation is approximated by representing it as a result of a bifurcation of the trajectory. Even though the trajectory is deformed, if the information corresponding to the phase factor is not lost, then the deformed trajectory is interpreted as the same quantum-mechanical state. A mechanism of interference of probability amplitudes is also considered.

1. はじめに

量子力学的確率では、ヒルベルト空間のヴェクトルで量子力学的状態が表現される。この状態は物理的対象の真の状態を表わすものではなく、物理的対象に対する測定の統計的な結果を再現するためのものである。量子力学的状態は純粋状態であっても、単一の物理系の真の状態とは言えないものである [1]。従って、物理的対象の系が真の状態としては異なる状態として用意されたとしても、量子力学的には同じ状態とみなされる。更に、量子力学的状態を表わす波動関数に位相をずらす定数 $e^{i\theta}$ を掛けても、同じ量子力学的状態と解釈される。しかし、異なる波動関数間の位相の差は物理的な意味を持つので、この波動関数の位相因子になんらかの物理的な意味づけが必要と思われる。

本稿では、この位相因子に一つの解釈を与え、量子力学的確率を再現する隠れた変数

キーワード:量子力学的確率, 隠れた変数, 周期的軌道
Key words: Quantum-mechanical Probability, Hidden Variables, Periodic Trajectories

によって真の状態が表現されるであろう模型を提案する。量子力学的状態には、周期的軌道が対応し、その周期的軌道のパラメータがこの位相に対応するという模型である。

2. 周期的軌道を量子力学的状態とする模型

環境と相互作用した結果、周期的軌道を描く物理的な対象の系 Σ を考えよう。この物理的な対象の相空間を Q で表わすことにする。物理量 A を測定する文脈 $\underline{\alpha}$ において、高々N 個の測定値 $a_i, i=1,\cdots,N$があり、それらに対応した周期的軌道 $\alpha_i, i=1,\cdots,N$ があるとする。周期的であるので、測定値は一定で、安定である。$\sigma \in \alpha_i$ に対して、$A(\sigma)=a_i$ であるが、σ は時間的に α_i に沿って変化し続ける [3]。他の物理量の測定においては、σ よりも周期的軌道 α_i が一体となって変化するので、σ は Σ の真の状態であるが、測定結果の統計的性質だけを問題とする場合は、周期的軌道が状態とみなされる。簡単のために、以下で考察する測定の文脈は、この N が有限で同一の値のものだけに限ることにする。

周期的軌道 α_i は Q の閉曲線なので、パラメーター $\theta_{\alpha_i} \in [0,2\pi]$ を使って、$\alpha_i : [0,2\pi] \to Q$ なる関数で、$\alpha_i(2\pi) = \alpha_i(0)$ を満たすものと表わすことができる。Σ の時間発展は、パラメーター θ_{α_i} が時間 t の関数として $\{\alpha_i(\theta_{\alpha_i}(t)) :\ t \in \mathbb{R}\}$ という曲線として表わされる。

記述を簡単にするために、記号を導入する。Q の曲線 $\gamma_1 : [s_1,f_1] \to Q$ と $\gamma_2 : [s_2,f_2] \to Q$ が $\gamma_1(f_1)=\gamma_2(s_2)$ であるとき、それらの結合 $\gamma_1 \rhd \gamma_2$ を次のように定義する：

$$\gamma_1 \rhd \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [s_1,f_1]; \\ \gamma_2(t-f_1+s_2), & t \in [f_1, f_2+f_1-s_2]. \end{cases}$$

測定の文脈を $\underline{\alpha}$ から $\underline{\beta}$ に変化させたとき、$\underline{\beta}$ で測定される物理量 B の値 $b_1,\cdots,b_N$ に対応した周期的軌道 $\beta_1,\cdots,\beta_N$ が出現する。最初に α_i 内の状態にあった Σ は、例えば β_k 内の状態へと遷移するであろう。この遷移は、α_i と β_k を繋ぐ曲線 ξ に沿うものとしよう。

θ_{α_i} を上述した α_i のパラメータ、θ_{β_k} を同様の β_k のパラメータとする。θ_{α_i} と θ_{β_k} の時間発展は異なるし、パラメータ付けの始点の選び方も一意ではないので、これらを関連付けておくことが便利である。この関連付けを c で表わし、$\theta_{\beta_k}=c(\theta_{\alpha_i})=\theta_{\alpha_i}$となるものとしよう。

α_i と β_k を繋ぐ曲線 ξ の始点を $\xi(s_\xi)$ とすると、$\alpha_i(s_{\alpha_i}^{\beta_k})=\xi(s_\xi)$ なるパラメーター値 $s_{\alpha_i}^{\beta_k}$ が存在する。同様に、曲線 ξ の終点を $\xi(f_\xi)$ とすると、$\beta_k(f_{\alpha_i}^{\beta_k})=\xi(f_\xi)$ なるパラメーター値 $f_{\alpha_i}^{\beta_k}$ が存在する。

測定の文脈を $\underline{\alpha}$ から $\underline{\beta}$ に変更した場合の α_i 内の状態にあった Σ への影響を $\alpha_i(s_{\alpha_i}^{\beta_k})$ を分岐点として ξ に分岐し、$\beta_k(f_{\alpha_i}^{\beta_k})$ を分岐点として ξ から β_k へ分岐する経路として近似して記述しよう。近似というのは、実際は β_k がリミットサイクルとなるような軌道を描くはずだが [2]、極限ではなく β_k のある近傍の状態も β_k に含まれるとするという意味である。

時刻 t_0 を $\theta_{\alpha_i}(t_0)=s_{\alpha_i}^{\beta_k}$ とし、ξ に沿って変化する時間を$\varDelta t_\xi$とする。Σが $\beta_k(f_{\alpha_i}^{\beta_k})$に到達したとき、もし$\xi$に分岐しないまま α_i に沿って状態が変化していたならば、それは $\alpha_i(\theta_{\alpha_i}(t_0+\varDelta t_\xi)) = \alpha_i(s_{\alpha_i}^{\beta_k}+\varDelta\theta_\xi)$ になっている。ここで、$\varDelta\theta_\xi := \theta_{\alpha_i}(t_0+\varDelta t_\xi)-\theta_{\alpha_i}(t_0)$ と置いた。

パラメータの関連付け c で β_k のパラメータに移すと、$c(s_{\alpha_i}^{\beta_k}+\varDelta\theta_\xi)=s_{\alpha_i}^{\beta_k}+\varDelta\theta_\xi$ となる。ξ に分岐して β_k に到達した状態との差は、

$$\varDelta\theta_{\alpha_i}^{\beta_k} := f_{\alpha_i}^{\beta_k} - s_{\alpha_i}^{\beta_k} - \varDelta\theta_\xi \tag{1}$$

のパラメータ値の差で表わされる。

測定の文脈を $\underline{\alpha}$ から $\underline{\beta}$ へと完全に変更するのではなく、$\underline{\alpha}$ と $\underline{\beta}$ の中間で、$\underline{\alpha}$ に近い環境に Σ が置かれたとしよう。われわれの近似で

は、周期的軌道 α_i は、α_i から β_k にいったん分岐してまた α_i に戻るような周期的軌道に変形されると考えられる。周期的軌道 α_i のパラメータが s_1 から s_2 までの部分軌道

$$\alpha_i[s_1, s_2](\theta) := \alpha_i(\theta),\ \theta \in [s_1, s_2]$$

が定義される。β_k に関しても同様の記号を使うと、つまり、この変形された周期的軌道は

$$\alpha_i[0, s^{\beta_k}_{\alpha_i}] \rhd \xi \rhd \beta_k[f^{\beta_k}_{\alpha_i}, s^{\alpha^i}_{\beta_k}] \rhd \xi' \rhd \alpha_i[f^{\alpha_i}_{\beta_k}, 2\pi] \tag{2}$$

である。ここで、ξ' は β_k から α_i へと繋がる曲線で、$\beta_k(s^{\alpha_i}_{\beta_k})$ と $\alpha_i(f^{\alpha_i}_{\beta_k})$ は、各々その始点と終点である。

ここで、我々はモデルをより簡明なものとするために、分岐点は出る時と入る時で同一と仮定しよう、つまり:

$$s^{\beta_k}_{\alpha_i} = f^{\alpha_i}_{\beta_k},\ f^{\beta_k}_{\alpha_i} = s^{\alpha_i}_{\beta_k}. \tag{3}$$

このように仮定した (2) を以下の記号で表すことにする:

$$\alpha_i \cdot (s^{\beta_k}_{\alpha_i}) \multimap_{\xi,\xi'} \beta_k(f^{\beta_k}_{\alpha_i}). \tag{4}$$

周期的軌道の (4) については、分岐しない元の α_i と比較したとき、パラメータ θ の変化は、以下のようになる:

$$\begin{aligned} & \Delta\theta^{\beta_k}_{\alpha_i} + \Delta\theta^{\alpha_i}_{\beta_k} \\ = \ & f^{\beta_k}_{\alpha_i} - s^{\beta_k}_{\alpha_i} - \Delta\theta_\xi + f^{\alpha_i}_{\beta_k} - s^{\alpha_i}_{\beta_k} - \Delta\theta_{\xi'} \\ = \ & -\Delta\theta_\xi - \Delta\theta_{\xi'}. \end{aligned}$$

ξ と ξ' について、

$$\Delta\theta_\xi + \Delta\theta_{\xi'} = 0 \ (\bmod 2\pi) \tag{5}$$

と仮定すると、$\alpha_i \cdot (s^{\beta_k}_{\alpha_i}) \multimap_{\xi,\xi'} \beta_k(f^{\beta_k}_{\alpha_i})$ において α_i に戻ったときに、分岐しないで α_i のままであった場合と同じ状態に戻ることになる。この仮定は、測定の文脈の変更の影響が少ないことを意味するので、“$\underline{\alpha}$ に近い”$\underline{\alpha}$ と $\underline{\beta}$ の中間の測定の文脈ということのより正確な意味を与えると考えることができる。ξ と ξ' については、以上の仮定をし、簡単のためにそのような仮定を満たす分岐によって変形された周期的軌道を単に $\alpha_i \cdot (s^{\beta_k}_{\alpha_i}) \multimap \beta_k(f^{\beta_k}_{\alpha_i})$ と書くことにする。

$\cdot(s^{\beta_k}_{\alpha_i}) \multimap \beta_k(f^{\beta_k}_{\alpha_i})$ を周期的軌道 α_i に左から作用して周期的軌道に写像する演算を考えると、β_k に分岐する回数を n_k 回として繰り返し作用させることで得られる周期的軌道を $\chi^{(n_1,\cdots,n_N)}_{\underline{\beta}}(\alpha_i)$ と書くことにしよう。すなわち、

$$\begin{aligned} & \chi^{(n_1,\cdots,n_N)}_{\underline{\beta}}(\alpha_i) := \\ & \alpha_i \underbrace{\cdot(s^{\beta_1}_{\alpha_i}) \multimap \beta_1(f^{\beta_1}_{\alpha_i}) \cdots\cdot (s^{\beta_1}_{\alpha_i}) \multimap \beta_1(f^{\beta_1}_{\alpha_i})}_{n_1} \\ & \cdots \\ & \underbrace{\cdot(s^{\beta_N}_{\alpha_i}) \multimap \beta_N(f^{\beta_N}_{\alpha_i}) \cdots\cdot (s^{\beta_N}_{\alpha_i}) \multimap \beta_N(f^{\beta_N}_{\alpha_i})}_{n_N} \end{aligned} \tag{6}$$

測定の文脈 $\underline{\beta}$ に近付くことは、$\chi^{(n_1,\cdots,n_N)}_{\underline{\beta}}(\alpha_i)$ において、$n_k \to \infty (k = 1, \cdots, N)$ となる場合に相当する。α_i 内よりも $\beta_1, \cdots, \beta_N$ 内に状態が存在する可能性が高くなるからである。$n := n_1 + \cdots + n_N$ と置くと、α_i の周期的軌道で状態が変化していた Σ が、測定の文脈 $\underline{\beta}$ で対応する物理量 B の測定結果が b_k である確率は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_k}{n}$$

で与えられることになる。

形式的に $\lim_{n\to\infty} \chi^{(n_1,\cdots,n_N)}_{\underline{\beta}}(\alpha_i)$ を考えて、それを $\chi_{\underline{\beta}}(\alpha_i)$ と書くことにしてみよう。$\chi_{\underline{\beta}}(\alpha_i)$ はもはや周期的軌道とは限らない。しいて言うならば、周期的軌道 $\beta_1, \cdots, \beta_N$ の和集合ということができる。対象系 Σ が測定によって消失しないのならば、この極限では $\beta_1, \cdots, \beta_N$ のどれかにその状態が属していなければならず、これが量子力学で波束の収縮と呼ばれることに対応することである。$n \to \infty$

を取らない限り、このことは起きず、α_i の情報を正確に持ち続けている。

3. 確率の打ち消し合いに関する考察

ここまでのわれわれの模型構成のための原理は、一つの測定の文脈で安定な周期的軌道が、他の測定の文脈で安定な周期的軌道に分岐し、そして元に戻るということであった。それでは、$\chi_{\underline{\beta}}^{(n_1,\cdots,n_N)}(\alpha_i)$ に対して、第 3 の測定の文脈 $\underline{\gamma}$ での測定をしたとき、その中間的な影響はどのように考えるべきかは、興味深いことである。

$\chi_{\underline{\beta}}^{(n_1,\cdots,n_N)}(\alpha_i)$ において、n_k が十分に大きいときは、$\underline{\gamma}$ における周期的軌道 $\gamma_j, j = 1,\cdots,N$ への分岐は、α_i から直接分岐するよりも、$\beta_k, k = 1,\cdots,N$ から分岐する可能性の方が高い。そこで、α_i から直接分岐する場合は除いて考察しよう。$\chi_{\underline{\beta}}^{(n_1,\cdots,n_N)}(\alpha_i)$ の場合、分岐の仕方として、α_i から β_k へ分岐し、次に γ_j に分岐して、次に β_l に分岐して、α_i に分岐して戻るという可能性が生ずる。この軌道は、

$$\begin{aligned}&\alpha_i[0, s_{\alpha_i}^{\beta_k}] \triangleright \xi \triangleright \beta_k[f_{\alpha_i}^{\beta_k}, s_{\beta_k}^{\gamma_j}]\\ &\triangleright \eta \triangleright \gamma_j[f_{\beta_k}^{\gamma_j}, s_{\gamma_j}^{\beta_l}] \triangleright \eta'\\ &\triangleright \beta_l[f_{\gamma_j}^{\beta_l}, s_{\beta_l}^{\alpha_i}] \triangleright \xi' \triangleright \alpha_i[f_{\beta_l}^{\alpha_i}, 2\pi] \quad (7)\end{aligned}$$

のようになる。しかし、もともと β_k からの分岐で元に戻るものに限定していたはずなので、このような軌道が組み合わさって β_k に戻る分岐がつくられるとしなければならない。

一般に $k \neq l$ の場合、$\alpha_i(s_{\alpha_i}^{\beta_k}) \neq \alpha_i(f_{\beta_l}^{\alpha_i})$ であるから、α_i の軌道の情報の一部が失われてしまう。また、α_i にとどまって分岐しなかった場合と比較した時のパラメーターの差は

$$\begin{aligned}&\Delta\theta_{\alpha_i}^{\beta_k} + \Delta\theta_{\beta_k}^{\gamma_j} + \Delta\theta_{\gamma_j}^{\beta_l} + \Delta\theta_{\beta_l}^{\alpha_i}\\ = \ & f_{\alpha_i}^{\beta_k} - s_{\alpha_i}^{\beta_k} - \Delta\theta_\xi + f_{\beta_k}^{\gamma_j} - s_{\beta_k}^{\gamma_j} - \Delta\theta_\eta\\ &+ f_{\gamma_j}^{\beta_l} - s_{\gamma_j}^{\beta_l} - \Delta\theta_{\eta'} + f_{\beta_l}^{\alpha_i} - s_{\beta_l}^{\alpha_i} - \Delta\theta_{\xi'}\end{aligned}$$

となる。これを $\Delta\theta_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l)$ と書くことにする。

$k = l$ の場合は、$\Delta\theta_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,k) = \Delta\theta_\xi + \Delta\theta_\eta + \Delta\theta_{\eta'} + \Delta\theta_{\xi'}$ となって、2π の整数倍になり、分岐しなかった場合と同じ状態に戻ることになる。

β_k の添え字 k の二つ組みの集合を次のように二つに分ける:

$$\begin{aligned}I_+ &= \{(k,l) : \cos\Delta\theta_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l) \geq 0\}; \quad (8)\\ I_- &= \{(k,l) : \cos\Delta\theta_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l) < 0\}. \quad (9)\end{aligned}$$

$(k,l) \in I_-$ の場合は、$|\Delta\theta_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l)| > \pi$ となって、元の状態から遠い状態へ戻ることを意味する。$(k,l) \in I_+$ の場合でも、$\cos\Delta\theta_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l) > 0$ の場合は、元の状態に近いが、異なる状態へ戻ることを意味する。

ξ, ξ', η, η' に対する仮定を以下のように以前ものより強くする:

$$\Delta\theta_\xi, \Delta\theta_{\xi'}, \Delta\theta_\eta, \Delta\theta_{\eta'} = 0 \ (\bmod 2\pi)$$

すると、

$$\Delta\theta_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l) = -\Delta\theta_{\alpha_i}^{\gamma_j}(l,k) \ (\bmod 2\pi)$$

が成り立つ。従って、$(k,l) \in I_+ \Leftrightarrow (l,k) \in I_+$ と、$(k,l) \in I_- \Leftrightarrow (l,k) \in I_-$ が成り立つ。

α_i から β_k へ分岐する度合いを表わす重みを $l(\alpha_i, \beta_k)$ と書くことにしよう。これは、$l(\alpha_i, \beta_k) \geq 0$ であり、$\sum_k l(\alpha_i, \beta_k)^2 = 1$ を満たし、対称的である、すなわち $l(\alpha_i, \beta_k) = l(\beta_k, \alpha_i)$ を満たすものである [4, 5, 6]。

(7) のような分岐が生ずる確率が $P(\Delta\theta_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l))l(\alpha_i, \beta_k)l(\beta_k, \gamma_j)l(\gamma_j, \beta_l)l(\beta_l, \alpha_i)$ である、すなわちパラメータの違いに関して

は $\mathit{\Delta}\theta_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l)$ だけに依存するとし、かつ P は偶関数とするならば、

$$\begin{aligned}&\Lambda_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l) :=\\&\alpha_i[s_{\alpha_i}^{\beta_k}, s_{\alpha_i}^{\beta_k}] \rhd \xi \rhd \beta_k[f_{\alpha_i}^{\beta_k}, s_{\beta_k}^{\gamma_j}]\\&\rhd\eta \rhd \gamma_j[f_{\beta_k}^{\gamma_j}, s_{\gamma_j}^{\beta_l}] \rhd \eta'\\&\rhd\beta_l[f_{\gamma_j}^{\beta_l}, s_{\beta_l}^{\alpha_i}] \rhd \xi' \rhd \alpha_i[f_{\beta_l}^{\alpha_i}, f_{\beta_l}^{\alpha_i}]\end{aligned}$$

という分岐に対して、それを逆向きに辿る分岐

$$\begin{aligned}&\alpha_i[s_{\alpha_i}^{\beta_l}, s_{\alpha_i}^{\beta_l}] \rhd \xi'' \rhd \beta_l[f_{\alpha_i}^{\beta_l}, s_{\beta_l}^{\gamma_j}]\\&\rhd\eta'' \rhd \gamma_j[f_{\beta_l}^{\gamma_j}, s_{\gamma_j}^{\beta_k}] \rhd \eta'''\\&\rhd\beta_k[f_{\gamma_j}^{\beta_k}, s_{\beta_k}^{\alpha_i}] \rhd \xi''' \rhd \alpha_i[f_{\beta_k}^{\alpha_i}, f_{\beta_k}^{\alpha_i}]\end{aligned}$$

が必ず組みとなって存在する。これらを結合した軌道

$$\begin{aligned}&\Lambda_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l) \rhd \Lambda_{\alpha_i}^{\gamma_j}(l,k) =\\&\alpha_i[s_{\alpha_i}^{\beta_k}, s_{\alpha_i}^{\beta_k}] \rhd \xi \rhd \beta_k[f_{\alpha_i}^{\beta_k}, s_{\beta_k}^{\gamma_j}]\\&\rhd\eta \rhd \gamma_j[f_{\beta_k}^{\gamma_j}, s_{\gamma_j}^{\beta_l}] \rhd \eta'\\&\rhd\beta_l[f_{\gamma_j}^{\beta_l}, s_{\beta_l}^{\alpha_i}] \rhd \xi' \rhd \alpha_i[f_{\beta_l}^{\alpha_i}, s_{\alpha_i}^{\beta_l}]\\&\rhd\alpha_i[s_{\alpha_i}^{\beta_l}, s_{\alpha_i}^{\beta_l}] \rhd \xi'' \rhd \beta_l[f_{\alpha_i}^{\beta_l}, s_{\beta_l}^{\gamma_j}]\\&\rhd\eta'' \rhd \gamma_j[f_{\beta_l}^{\gamma_j}, s_{\gamma_j}^{\beta_k}] \rhd \eta'''\\&\rhd\beta_k[f_{\gamma_j}^{\beta_k}, s_{\beta_k}^{\alpha_i}] \rhd \xi''' \rhd \alpha_i[f_{\beta_k}^{\alpha_i}, s_{\alpha_i}^{\beta_k}]\end{aligned}$$

は、$\alpha_i(s_{\alpha_i}^{\beta_k})$ で分岐して β_k を経由して、この元の状態に戻る軌道である。$(k,l) \in I_-$ の場合は、元の状態から遠く離れた状態を経由することから、特に区別して $\Lambda_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l)$ の代わりに $M_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l)$ と書くことにする。

$\chi_{\underline{\beta}}^{(n_1,\cdots,n_N)}(\alpha_i)$ に対して、測定の文脈 $\underline{\gamma}$ に近い環境に Σ を置くことになるが、$\underline{\gamma}$ に近づけたときに可能になる分岐は、どのようになるであろうか。$M_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k',l')$ は $\Lambda_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l)$ よりも遠回りな分岐となるので、$\underline{\gamma}$ に近づけたときにはこの可能性は減って行くであろう。$\Lambda_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l)$ に分岐したあと、α_i の元の状態にもどるとき、$M_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k',l')$ と結合した場合は、やはり遠回りに元に戻る分岐となると、この分岐も増加の可能性が低いと考えられる。$\underline{\gamma}$ に近づけたとき、$\Lambda_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l)$ に分岐したあと、$M_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k',l')$ とは結合しないで残された $\Lambda_{\alpha_i}^{\gamma_j}(l'',k'')$ と結合する場合が増加していくであろう。

このような考察から、$\underline{\gamma}$ で測定にかかる可能性のある周期的軌道は、最初に $\Lambda_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l)$ に分岐して $\Lambda_{\alpha_i}^{\gamma_j}(l',k')$ に結合して戻ってくるようなものだけである。$\{\Lambda_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l) : (k,l) \in I_+\}$ に分岐する確率は、

$$\sum_{(k,l)\in I_+} P'(\mathit{\Delta}\theta_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l))$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}&P'(\mathit{\Delta}\theta_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l))\\:=\;&P(\mathit{\Delta}\theta_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l))\\&\times l(\alpha_i,\beta_k)l(\beta_k,\gamma_j)l(\gamma_j,\beta_l)l(\beta_l,\alpha_i)\end{aligned}$$

と置いた。$\mathit{\Delta}\theta_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,k) = 0(\mathrm{mod}\ 2\pi)$ であったので、すべての $k = 1,\cdots,N$ について、$(k,k) \in I_+$ である。β_k から γ_j に分岐したあと、$(k,l) \in I_-$ なる β_l に分岐すると、この軌道は $M_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l)$ となる。そのような確率のすべての k に対する和は

$$\sum_{(k,l)\in I_-} P'(\mathit{\Delta}\theta_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l))$$

となる。従ってそうではない確率は

$$\sum_{(k,l)\in I_+} P'(\mathit{\Delta}\theta_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l)) - \sum_{(k,l)\in I_-} P'(\mathit{\Delta}\theta_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l))$$

になるであろう。$\underline{\gamma}$ に近付くにつれ、$M_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l)$ になるような分岐は許されなくなり、そうではない分岐だけが残ると言う解釈である。$\Lambda_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,k)$ という分岐は元の状態に戻る可能性があるだけで、常に許されているわけではなく、$M_{\alpha_i}^{\gamma_j}(k,l)$ にされてしまうように環境が働きかけることになるという解釈である。場合によっては、γ_j になる確率が 0 にも成り得る。

これは、量子力学の重ね合わせの再現に必要な結果である。

簡単のため、形式的に $\chi_{\underline{\beta}}^{(n_1,\cdots,n_N)}(\alpha_i)$ から以上のような分岐によってつくられる周期的

軌道を $\chi_{\underline{\gamma}}(\chi_{\underline{\beta}}^{(n_1,\cdots,n_N)}(\alpha_i))$ と表わすとしよう。すると、$\chi_{\underline{\gamma}}^{(n'_1,\cdots,n'_N)}(\alpha_i)$ との関係はどうなるか気になる。n_k や n'_k が大きくなったとしても、$\chi_{\underline{\gamma}}(\chi_{\underline{\beta}}^{(n_1,\cdots,n_N)}(\alpha_i))$ と $\chi_{\underline{\gamma}}^{(n'_1,\cdots,n'_N)}(\alpha_i)$ は等しくはあるまい。これらが同じ統計的性質を持つという量子力学的確率を再現するためには、$P(\theta) = |\cos\theta|$ と置く必要がある。そうすることで、ヒルベルト空間のヴェクトルと対応付けが可能になるからである [3]。すると、$\underline{\gamma} = \underline{\alpha}$ と置いたとき、$j \neq i$ について、$\gamma_j = \alpha_j$ として測定される確率は 0 となり、$\chi_{\underline{\alpha}}^{(n'_1,\cdots,n'_N)}(\alpha_i) = \alpha_i$、あるいは $l(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ と、$\chi_{\underline{\alpha}}(\chi_{\underline{\beta}}^{(n_1,\cdots,n_N)}(\alpha_i))$ に対する測定結果が整合的になる。

[参考文献]

[1] 内山　智, “量子力学的状態について”, 北星学園大学短期大学部北星論集, **10**, 59–65 (2013).

[2] S. Uchiyama, “Local Reality: Can It Exist in the EPR–Bohm Gedanken Experiment?”, *Found. Phys.* , **25** (1995) 1561–1575.

[3] 内山　智, “量子重ね合わせ原理の一つの解釈について”, 北星学園大学短期大学部北星論集, **8**, 1–7 (2010).

[4] 内山　智, “均衡原理と量子力学的確率”, 北星学園大学短期大学部北星論集, **9**, 33–41 (2011).

[5] 内山　智, “均衡原理に基づく量子力学的過程による複合系の取り扱い”, 北星学園大学短期大学部北星論集, **10**, 13–21 (2012).

[6] 内山　智, “量子力学的過程の測定結果の非局所性について”, 北星学園大学短期大学部北星論集, **11**, 67–70 (2013).