北星論集（経） 第47巻 第２号（通巻第53号） March 2008

偏微分方程式としてのシュレディンガー方程式の回路理論から見た特長

永 井 信 夫

目 次

Ⅰ．はじめに

文献[1]において，量子力学で用いられるシュレディンガー方程式を回路理論の観点から見直しをして，マクスウェル方程式から得られる波動方程式の拡張であり，波動回路理論で取り扱うのが適当であることを詳述した。

本文では，熱伝導方程式あるいは拡散方程式を回路理論の立場から考え，シュレディンガー方程式は熱伝導方程式あるいは拡散方程式と似た方程式であるが，回路理論の立場から見るとマクスウェル方程式から得られる波動方程式の拡張と考える方が適していることを示すのが第一の目的である。その目的を達成するために，分子の運動方程式に関する文献[2]をまず取り上げる。

すなわち，分子の運動方程式を用いることにより，分子の振動に関する等価回路を求めることができ，その等価回路を極限操作すると，マクスウェル方程式あるいは無損失電信方程式を満たすため，分子の振動には電圧と電流という２つの関数（成分）をもつことが示されたことになる[2]。また，文献[3]では流体力学の一例題を回路理論の観点からみて，定常状態と過渡状態との区別を明確にすることができた。

このように，物理現象に回路理論を応用すれば，物理現象の隠された性質を明るみに出すことができたり，あるいは，回路理論の隠された性質も明らかにされたりする場合があることが示されたということができると考えられる。

本文では，熱伝導方程式あるいは拡散方程式をとりあげる。ところで，回路理論を応用できる適切な次元は，エネルギーが伝えられることがはっきりと表される，時間次元と位置空間が１次元（それを x 方向と表す）の関数 $f(x,t)$ となることを今まで用いてきた。そこで，熱伝導方程式に対しても同様の次元の方程式を考えることにしよう。

なお，熱伝導方程式あるいは拡散方程式は波動方程式に非常に似ている方程式であるが，確率論の問題に密接に関係している。一方，

キーワード：偏微分方程式の回路理論，熱伝導方程式，シュレディンガー方程式，マクスウェル方程式，波動方程式

シュレディンガー方程式は存在確率を表す式として確率論に関係させているが，われわれはシュレディンガー方程式を波動方程式の拡張と考えている。その違いなどもできれば明らかにしたいと考えている。

Ⅱ．熱伝導方程式

熱伝導方程式を拡散方程式とも呼ぶ。この偏微分方程式の導出法から考える。

2.1 熱伝導方程式の導出法

文献[4]に記述されているように，物体内の熱伝導を記述する方程式は，粒子の運動を表すランダムウォークと総称される拡散方程式よりも古くから知られていた。この熱伝導方程式の導出は，物体の比熱とか密度などの物理学上の定義が必要である。それに対して，拡散方程式は離散的な系から極限移行によって微分方程式が得られるから，ここでは，拡散方程式の導出法を文献[4]を引用して簡単に述べる。

x 軸上に等間隔 h で点を配置し，それらを $x_{\mathrm{j}}(=jh)$ とおく。また，時間軸にも一定間隔で刻みを入れ，それらを $t_{\mathrm{k}}(=\mathrm{k}\tau)$ とおく。今，点列 $\{x_{\mathrm{j}}\}$ 上を次の規則に従って運動する粒子を考える。

［規則］　時刻 t_{k} において点 x_{j} の位置にある粒子は，時刻 $t_{\mathrm{k+1}}$ で $x_{\mathrm{j-1}}$ または $x_{\mathrm{j+1}}$ の位置にそれぞれ p の確率で移動し，$1-2p$ の確率で同じ位置 x_{j} にとどまる。ここで p は，$0<p\leqq 1/2$ を満たす定数である。

このような粒子の運動は，ランダムウォークと総称される運動の特別の場合である。粒子の数が膨大で，かつ各粒子が互いに独立に上記の運動を繰り返すとすると，各位置 x_{j}，各時刻 t_{k} における粒子数 $u(x_{\mathrm{j}},t_{\mathrm{k}})$ の間に以下の関係式が成り立つ。

$$u(x_j,t_{k+1})=pu(x_{j-1},t_k)+(1-2p)u(x_j,t_k)+pu(x_{j+1},t_k) \tag{1}$$

この関係式は，次のように書き直せる。

$$\frac{u(x_j,t_k+\tau)-u(x_j,t_k)}{\tau}=$$

$$\frac{ph^2}{\tau}\frac{u(x_j-h,t_k)-2u(x_j,\ t_k)+u(x_j+h,t_k)}{h^2} \tag{2}$$

さて今，時間刻み幅 τ と空間刻み幅 h を τ/h^2 を一定値（$=a$）に保ちながら 0 に近づけると，上の差分方程式は形式的に以下の偏微分方程式に移行する。

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\frac{p}{a}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \tag{3}$$

2.2 熱伝導方程式の解

ランダムウォークと熱の伝導とを関係させて，文献[5]では解を述べているので，それを引用する。

熱伝導方程式を次のように表す。

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)=D\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) \tag{4}$$

ここに，$D>0$ は定数である。関数

$$f(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-x^2/4Dt} \tag{5}$$

が解になっていることは直接計算すれば確かめられる。この式からも熱が拡散する様子がうかがえる。ところで，式(5)は正規分布 $\mathrm{N}(0,2Dt)$ の密度関数であることに注意しよう。正規分布はランダムウォーク $\{x_n\}$ の分布にも（近似として）現れているが，これは偶然の一致ではない。実は，熱拡散方程式(4)は対称ランダムウォークの分布 $u(k,n)$ の満たす次の差分方程式の連続極限として導出されることが示される。

$$u(k,n+1)-u(k,n)=$$

$$\frac{1}{2}\{u(k-1,n)-2u(k,n)+u(k+1,n)\} \tag{6}$$

なお，式(6)は，式(1)に $p=1/2$ を代入したものであり，粒子は元の位置に留まることなく，必ず移動することを表す。また，式(6)は大雑把にいえば次のように解釈される。すなわち，熱の伝導は「熱素」をもった多数のランダムウォークの運動によって引き起こされると考えられる。このような確率的なアイ

デアは，熱伝導方程式より一般の拡散方程式の研究になくてはならないものである。

2.3 初期境界値問題

文献[6]に基づいて，式(4)を次の境界条件のもとで解いてみよう。

境界条件：

$$\frac{\partial}{\partial x}f(0,t)=0,\ \frac{\partial}{\partial x}f(1,t)=0,\ t\geqq 0 \quad (7)$$

初期条件：

$$f(x,0)=g(x),\quad 0\leqq x\leqq 1 \quad (8)$$

この偏微分方程式を解くために，変数分離法を使って，

$$f(x,t)=V(x)W(t) \quad (9)$$

と仮定して，式(6)に代入すれば，次のようになる。

$$V(x)\cdot\frac{d}{dt}W(t)=D\frac{d^2}{dx^2}V(x)\cdot W(t) \quad (10)$$

そこで，次のように置こう。

$$\frac{V''(x)}{V(x)}=\frac{1}{D}\frac{W'(t)}{W(t)}=\lambda \quad (11)$$

この２つの微分方程式を次の２つに分けて，

〔Ⅰ〕 $$\frac{V''(x)}{V(x)}=\lambda \quad (12a)$$

〔Ⅱ〕 $$\frac{1}{D}\cdot\frac{W'(t)}{W(t)}=\lambda \quad (12b)$$

それぞれを解こう。

〔Ⅰ〕　左辺の微分方程式は，次のように表される。

$$V''(x)-\lambda V(x)=0 \quad (13a)$$

上の特性方程式は

$$s^2-\lambda=0 \quad (13b)$$

なので，定数 λ は次の３つの場合が考えられる。

（ⅰ）$\lambda>0$，（ⅱ）$\lambda=0$，（ⅲ）$\lambda<0$ (14)

（ⅰ）$\lambda>0$ の場合，簡単な計算から，解がないことが示せる。

（ⅱ）$\lambda=0$ の場合，簡単な計算により，

$$V(x)=C \quad \text{（Cは任意定数）} \quad (15)$$

となる。

（ⅲ）$\lambda<0$ の場合，基本解は，

$$e^{0\cdot x}\cos\left(\sqrt{-\lambda}\,x\right),\ e^{0\cdot x}\sin\left(\sqrt{-\lambda}\,x\right) \quad (16)$$

したがって，一般解は次のように表される。

$$V(x)=C_1\cos\left(\sqrt{-\lambda}\,x\right)+C_2\sin\left(\sqrt{-\lambda}\,x\right) \quad (17)$$

境界条件を満たす解を求めるために，上式を微分しよう。

$$V'(x)=-C_1\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{-\lambda}\,x\right)+C_2\sqrt{-\lambda}\cos\left(\sqrt{-\lambda}\,x\right) \quad (18)$$

境界条件の式(7)を代入して，次式を得る。

$$V'(0)=C_2\sqrt{-\lambda}=0 \quad (19a)$$

$$V'(1)=-C_1\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{-\lambda}\right)+C_2\sqrt{-\lambda}\cos\left(\sqrt{-\lambda}\right)=0 \quad (19b)$$

したがって，次の条件が求まる。

$$C_2=0 \quad (20a)$$

$$\sqrt{-\lambda}=n\pi,\ (n=1,\ 2,\ \ldots) \quad (20b)$$

したがって，$V(x)$ は次のように求まる。

$$V(x)=C\cdot\cos(n\pi x),\ (n=1,\ 2,\ \ldots) \quad (21)$$

〔Ⅱ〕　右辺の微分方程式

$$\frac{1}{D}\frac{W'(t)}{W(t)}=\lambda \quad (22)$$

を解こう。この微分方程式は次のように求められる。

$$W(t)=C_t\exp(D\lambda t) \quad (23)$$

ところで，式(20b)で λ が次のように求まっている。

$$\lambda=-n^2\pi^2 \quad (24)$$

したがって，$W(t)$ は次のように求まる。

$$W(t)=C_t\exp(-Dn^2\pi^2t) \quad (25)$$

〔Ⅰ〕および〔Ⅱ〕の解が求まったので，熱伝導方程式(4)の解が次のように表される。

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C(n)\cos(n\pi x)\exp(-Dn^2\pi^2t) \quad (26)$$

文献[6]の引用を続ける。

〔Ⅲ〕初期条件の式(8)を満たす解

最後に，初期条件の式(8)を満たすように係数 $C(n)$ を求めよう。

式(26)に $t=0$ を代入して，

$$f(x,0)=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C(n)\cdot\cos(n\pi x) \quad (27)$$

ところが，この係数 $C(n)$ は，フーリエ級数展開により，初期条件の $g(x)$ から求まる。

すなわち，式(27)のフーリエ係数 $C(n)$ は次のように表される。このことは，熱伝導方程式(4)の解の式(26)の係数 $C(n)$ は次のように表されることを示している。

$$C(n) = 2\int_0^1 g(x)\cdot\cos(n\pi x)dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{28}$$

以上，熱伝導方程式(4)の境界条件(7)および初期条件(8)を満たす解が求められた。

2.4 簡単な初期境界値問題

熱伝導方程式(4)の解は初期条件の $g(x)$ の与えられ方にしたがっているので，$g(x)$ をフーリエ展開する必要があり，総和が用いられた。文献[6]では最も簡単な初期条件として

$$g(x) = \cos(x) \tag{29}$$

と与えて，熱伝導方程式の具体的な解を求めている。すなわち，熱伝導方程式を式(4)に $D = 1$ を代入して簡単化した次式を用い，

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) \tag{30}$$

この熱伝導方程式を次の境界条件と初期条件の下で解くことを考えている。

境界条件：

$$\frac{\partial}{\partial x}f(0,t) = 0,\ \frac{\partial}{\partial x}f(\pi,t) = 0,\ t \geqq 0 \tag{31a}$$

初期条件：

$$f(x,0) = g(x) = \cos(x),\ 0 \leqq x \leqq \pi \tag{31b}$$

熱伝導方程式(30)の解は次のように求まる。

$$f(x,t) = \cos(x)\cdot\exp(-t) \tag{32}$$

ここで，熱伝導方程式の解(32)について考えてみよう。すなわち，初期境界条件の式(7)，(8)がないときは，解である式(5)は $x = 0$ の値が他に比べて大きく，対称形となり，大数の法則を示しながら拡散する様子がよく表されている。一方，$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲での式(32)は非対称形で，時間が経過した後での大数の法則に適合していないように感じられる。そこで，x の範囲を次のように変え，また，境界条件および初期条件も次のように変えよう。

範囲：

$$-\pi \leqq x \leqq \pi \tag{33a}$$

境界条件：

$$\frac{\partial}{\partial x}f(-\pi,t) = 0,\ \frac{\partial}{\partial x}f(\pi,t) = 0,\ t \geqq 0 \tag{33b}$$

初期条件：

$$f(x,0) = g(x) = \cos(x), \tag{33c}$$

ところで，式(33a)の範囲では，式(32)の値は負になるところがあり，粒子の分布にはふさわしくないように感じされるので，負にならないように，定数を加えておこう。すなわち，

$$f(x,t) = \cos(x)\cdot\exp(-t)+1+\delta \tag{34}$$

ここに，δ は適当な負ではない数

ここに得られた初期値を含む境界値問題の解である，式(33)の条件の元での解である式(34)に目を向けてみよう。式(7)の境界条件は文献[5]に述べてあるように，$x = 0$ および $x = 1$ という棒の両端で熱が逃げない条件であるから，式(33b)の条件は $x = -\pi$ および $x = \pi$ という棒の両端で熱が逃げない条件である。解の式(34)は時間経過とともに熱が大数の法則を満足しながら，拡散する様子をよく表しているので，初期値を含む境界値問題の解として適切であると考えられよう。

次章以降に回路理論の立場から，熱伝導方程式を解くことを考えてみることにしよう。

Ⅲ．熱伝導方程式と同等な分布RC線路

波動回路は波動方程式を満足する回路を考えることであった。波動方程式に似た偏微分方程式として熱伝導方程式がある。回路理論で用いられる分布RC線路は，熱伝導方程式と同等であり，マクスウェル方程式が光などの波動を表すことを示すきっかけになった回路である。そこでここでは，分布RC線路を解析することにより，熱伝導方程式の特長を回路理論の観点から考えてみよう。

3.1 分布RC線路

分布RC線路については文献[7]で述べたことがあるが，ここでは位置空間が１次元の熱伝導方程式を解析するのであるが，エネルギーが伝わることを表す波動方程式の解析法を応用するという観点から，この方程式を解析しよう。

分布RC線路は損失項も含む一般の電信方程式の係数の一部分をゼロにしたものとみなせるので，電信方程式から考えよう。

一様な線路の単位長当たりの往復のインダクタンスを L，抵抗を R，線間の容量を C，漏れコンダクタンスを G と仮定する。そのときの電圧，電流の瞬時値を $v(x,t)$，$i(x,t)$ とすると，次の二つの式からなる線形偏微分方程式が得られ，それを電信方程式の基本式という。

$$-\frac{\partial}{\partial x}v(x,t)=Ri(x,t)+L\frac{\partial}{\partial t}i(x,t) \quad (35a)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}i(x,t)=Gv(x,t)+C\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) \quad (35b)$$

ヘヴィサイドが電信方程式を提案する前に用いられていたケルヴィンの分布RC線路[7]を調べてみよう。分布RC線路は式(35)において

$$L=G=0 \quad (36)$$

とおいたものであるから，次式のように表される。

$$-\frac{\partial}{\partial x}v(x,t)=Ri(x,t) \quad (37a)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}i(x,t)=C\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) \quad (37b)$$

式(37a)を x で偏微分し，式(37b)に代入して，電圧 $v(x,t)$ のみの次の方程式を得る。

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t)=-RC\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) \quad (38a)$$

また，式(37b)を x で偏微分し，式(37a)を t で偏微分したものを代入して，電流 $i(x,t)$ のみの次の方程式を得る。

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}i(x,t)=-RC\frac{\partial}{\partial t}i(x,t) \quad (38b)$$

式(38)の二つの式ともに，次の位置空間が１次元の放物型偏微分方程式すなわち，熱伝導方程式を満たす。

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)=\frac{1}{CR}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) \quad (39)$$

3.2 分布RC線路の回路理論的な解

分布RC線路は電圧 $v(x,t)$ および電流 $i(x,t)$ が共に位置空間が１次元の放物型偏微分方程式を満たすという特長があるが，それは電信方程式を満たすためである[7]。したがって，分布RC線路の解法は文献[7]に示してあるように単一周波数（正弦波）に対する定常状態の電圧および電流を求めるために，電圧および電流のフェーザを $V(x)$ および $I(x)$ と表し，x と t の関数が変数分離されて，次のように表されるとする。

$$v(x,t)=V(x)e^{j\omega t} \quad (40a)$$

$$i(x,t)=I(x)e^{j\omega t} \quad (40b)$$

上の式を式(37)に代入し，次の式を得る。

$$-\frac{d}{dx}V(x)=RI(x) \quad (41a)$$

$$-\frac{d}{dx}I(x)=j\omega CV(x) \quad (41b)$$

式(41)を x で微分して，次式を得る。

$$\frac{d^2}{dx^2}V(x)=\gamma^2V(x) \quad (42a)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}I(x)=\gamma^2I(x) \quad (42b)$$

ここに，γ は

$$\gamma=\sqrt{j\omega CR}=\alpha+j\beta \quad (43a)$$

ただし，

$$\alpha=\sqrt{\frac{\omega CR}{2}} \quad (43b)$$

$$\beta=\sqrt{\frac{\omega CR}{2}} \quad (43c)$$

と表され，γ は分布RC線路の伝搬定数とよばれる複素数であり，α を減衰定数，β を位相定数とよぶ。また，式(42)も積分定数 K_a および K_b を用いて次のように表せられる。

$$V(x)=K_a\exp(-\gamma x)+K_b\exp(\gamma x) \quad (44a)$$

上式を式(5a)に代入して，次式が得られる。

$$I(x) = \frac{K_a}{Z_0}\exp(-\gamma x) - \frac{K_b}{Z_0}\exp(\gamma x) \quad (44b)$$

ここに，Z_0 は

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R}{j\omega C}} = R_0 + jX_0 \quad (45a)$$

ただし，

$$R_0 = \sqrt{\frac{R}{2\omega C}} \quad (45b)$$

$$X_0 = -\sqrt{\frac{R}{2\omega C}} \quad (45c)$$

と表され，分布RC線路の特性インピーダンスとよばれる。

式(44)を用いて，分布RC線路の長さ l の縦続行列を求めよう。$x = 0$ における電圧 $V(0)$ および電流 $I(0)$ は式(44)を用いて次のように表せる。

$$V(0) = K_a + K_b \quad (46a)$$

$$I(0) = \frac{K_a}{Z_0} - \frac{K_b}{Z_0} \quad (46b)$$

したがって，

$$2K_a = V(0) + Z_0 I(0) \quad (46c)$$

$$2K_b = V(0) - Z_0 I(0) \quad (46d)$$

上の二つの式を式(44)に代入し，次式を得る。

$$V(x) = \cosh(\gamma x)V(0) - Z_0\sinh(\gamma x)I(0) \quad (47a)$$

$$I(x) = \frac{-1}{Z_0}\sinh(\gamma x)V(0) + \cosh(\gamma x)I(0) \quad (47b)$$

上の関係を行列でまとめると，次式が求まる。

$$\begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma x) & -Z_0\sinh(\gamma x) \\ -Z_0^{-1}\sinh(\gamma x) & \cosh(\gamma x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} \quad (48)$$

上の式は，縦続行列の逆行列となっているので,逆行列を求めることにより,長さ l の分布RC線路の縦続行列が次のように得られる。

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_0\sinh(\gamma l) \\ Z_0^{-1}\sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix} \quad (49)$$

上のように分布RC線路の縦続行列が求まったので，定常状態の解を求めてみると，あまり数式的にきれいな解が得られない。そこで，次章以降で熱伝導方程式と分布RC線路とを比較して，２つの偏微分方程式の違いを考察しよう。

Ⅳ．波動回路の特長

波動方程式も熱伝導方程式も波動回路に利用できることがわかったが，波動回路には波動方程式を用いた方が共鳴現象などを有効に利用できる。その理由などを考えよう。

4.1 変数分離法の特長

偏微分方程式を解く場合は変数分離法を用いることが多い。また，波動回路に用いる場合の変数分離法は，式(40)に示すように時間変数の項には $e^{j\omega t}$ なる指数関数を用いるが，どうしてであろうか。この理由こそが回路理論の特長で，その説明を次にしよう。

文献[2]において，分子の運動方程式を満たす変位を回路素子の一つであるコンデンサの電荷に対応させることができ，分子の運動方程式を満たす等価回路を求めることができた。また，分子が連続体と考えられるときの運動方程式に回路理論を応用したところ，その運動方程式を満足する関数は変位だけではなく，対となる２つの関数を定義することができ，その２つの関数はマクスウェル方程式を満足することを示した。

一方，物理学の教科書では，波動方程式を解析するときの変数分離法を適用するときは，三角関数を用いる。三角関数を用いると，角周波数 ω には必ず対として $-\omega$ の角周波数も含まれる。

ところで，フーリエ解析でよく知られているように，２つの異なる周波数の電圧と電流とでは有効電力は求められない。すなわち，角周波数 ω と対となる $-\omega$ との波には有効電力がない。ということは，回路理論で用いられる電圧と電流とでは，同じ角周波数 ω が必要のため，変数分離法の時間変数項の関数は，三角関数ではなく指数関数 $e^{j\omega t}$ を使うべきである。

4.2 偏微分方程式の回路理論への応用

波動方程式の解法については，文献[8]でやや詳しく述べた。すなわち，物理学ではダランベールの解法を重視していて，積分での取り扱いをしている。しかしながら，波動方程式はマクスウェル方程式から導かれるという立場を尊重するマイクロ波回路の取り扱いでは変数分離法に対して指数関数 $e^{j\omega t}$ を用いる。その基を築いたのは，文献[7]に述べているヘヴィサイドであったと私は考えている。

私は波動方程式を回路などに応用するにあたり，ヘヴィサイドは現在物理学で用いられている解法では応用にうまく利用できないことを予見して，応用にうまく利用できる数学の構築に苦労を重ね，演算子法などの新しい数学を考えたと思う。

ヘヴィサイドの演算子法はラプラス変換で数学的に認められた。それによって，常微分方程式が代数方程式に変換され，集中定数回路の解析が極めて容易になり，集中定数回路の過渡応答と定常状態の応答の区別がハッキリとした。波動回路を含む偏微分方程式を利用した回路理論においては，ラプラス変換は z 変換という遅れ素子となって過渡応答を表すこととなり，定常状態と過渡応答との区別をハッキリさせた。

また，ヘヴィサイドは装荷線輪をケーブルに挿入することにより伝送特性を改良する考えを基にして，影像パラメータ理論を考えた[9]。影像パラメータ理論によって，離散的な差分方程式とそれを極限移行して連続的な偏微分方程式を用いたものとの特性の違いもハッキリとさせることになった。

このようにヘヴィサイドの回路理論への貢献は非常に大きいが，ヘヴィサイドが研究を閉じたと考えられる1908年に誕生したのが松本秋男先生である。松本先生は重合ろ波器の発明[10]で有名であるが，松本先生の根本的な考えは，アンプを使用しないで電圧と電流とが指数関数 $e^{j\omega t}$ の複素回転のまま，どうすれば遠くに伝えることができるかであった。すなわち，松本先生はケーブルなどの電信方程式を満たす回路や影像パラメータ回路について，体系的に数値計算をして，それらの回路の示す神秘的とも言える特性のデータベースを作った[11]。この考えやデータベースが基となり，世界に誇れる「単位素子(u.e.)のみで構成される分布定数回路」や「それを拡張した多線条回路」の回路理論を創出した[12]。この理論によって，現在の携帯電話などに用いられるマイクロ波帯のマイクロ波ICが作られ得るようになった。これは物理学では考えられることのなかった回路理論という数学ができたからである。

4.3 偏微分方程式から得られる無損失回路

集中定数回路に関する回路理論は正実関数論である。それに対して，マクスウェル方程式や電信方程式という偏微分方程式から得られる回路理論は，文献[13]に述べたように考慮が必要である。すなわち，正実関数論ではインピーダンスやインピーダンス行列によって受動回路や無損失回路が判定される。それに対して，偏微分方程式から得られる回路理論では縦続行列が主役となる。そこで，文献[13]に述べたことであるが，縦続行列の復習をしておこう。

縦続行列は，次のように表される。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{50}$$

ただし，ここでは I_2 の電流方向も左から右を正の方向としている。

回路理論はエネルギーの保存則に深く関係があり，それを表すのが無損失回路である。無損失回路の条件が文献[13]に述べているので，その条件を再記する。

[無損失なるための縦続行列の条件]　二端子対回路が無損失なるための縦続行列の条件は次のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

ただし，A^* などは A などの共役複素数を表す。

上の条件は縦続行列が「Ｊ－ユニタリ行列」であると呼ばれる[14]。

なお，相反で無損失な回路は伝送回路となるとは限らないことを文献[13]の７章に述べていて，その代表的な回路が量子力学における「量子障壁」あるいはトンネル効果の区間となることを注意しておく。

ところで，行列式の本には平行四辺形の面積を変えない条件として，

$$AD-BC=1 \quad (52)$$

を満足する行列を SL(2, C) と表している[15]。回路理論においても電圧と電流との積が電力を表すから，式(52)が無損失回路に関係すると考えられる。しかし，回路理論では式(52)の条件は相反回路を表し，直接には無損失の条件ではない。

集中定数回路では，使用する回路素子が限定されているので，実現できる回路は正実関数と呼ばれる受動回路に限定されている。一方，偏微分方程式から得られる受動回路の条件は，出力の有効電力は入力の有効電力より大きくはならないという条件であるから，回路の受動の条件が次のように得られる。

[受動なるための縦続行列の条件]　二端子対回路が受動なるための縦続行列の条件は次のように与えられる。すなわち，

$$\begin{bmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

なる行列が，非負定値行列（non-negative definite）なら受動である。

この回路条件をＪ－受動（J-passive）とよぶ[14]。この条件は不等式なので，使い方には注意が必要である。

4.4 熱伝導方程式の等価回路の性質

熱伝導方程式は３章に述べたように，分布RC回路と等価であり，無損失回路とはならない。ただし，その証明を式(49)の縦続行列が式(53)の非負定値行列を満たすことを示すのは容易ではないが，電源の最大有能電力を負荷で取り出すことができないで，それより少ない有効電力しか取り出せないことは容易に示すことができる。

したがって，熱伝導方程式を満たす等価回路に対する回路理論では，共鳴現象や固有値問題を論ずることはできない。しかしながら，回路の性質から過渡現象と定常応答との違いを区別できること，および偏微分方程式と差分方程式との違いによる特性の違いを明確にすることを利用して，物理現象の適確な性質を明らかにすることができる。

Ⅴ．回路理論から観たランダムウォーク

ランダムウォークの差分方程式で表したときの特長については，文献[16]で述べている。一方，ランダムウォークは極限移行して偏微分方程式で表わされ，それが熱伝導方程式である。それではランダムウォークに関する差分方程式と偏微分方程式との特性の違いはどこにあるのだろうか。

そのことに関係する文章が文献[16]の２頁から３頁にかけて述べられているので，その部分を引用しよう。

『文献[17]による泥酔した酔っぱらい氏の移動問題は，次のように表すことができる。「泥酔した酔っぱらい氏が左右に延びた小路を等確率で左右に向きながら，１歩調の歩幅を h として移動している。この場合，M 歩での移動距離が mh を実現する確率を求める」ことが数学として重要な問題となる。ここで，自然数 M に対して

$$|m| << M \quad (54)$$

となるような正および負の整数となる m が実現される確率は２項分布の確率 $W(m, M)$ を用いて，次のように表される。

$$W(m, M) = \left[\frac{1}{2}\right]^M \frac{M!}{\left[\dfrac{M+m}{2}\right]!\left[\dfrac{M-m}{2}\right]!} \tag{55}$$

上式において，M が大きい数の場合は，スターリングの公式などを用いて，次のように求められる。

$$W(m, M) \approx \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-\frac{m^2}{2M}} \tag{56}$$

上に求めた分布は離散的な分布の場合であるが，確率過程では連続的な分布を求めることとなり，正規確率変数が次のように定義される[17]。

〔定義１〕(正規確率変数)

任意の実数の値　$-\infty < r < \infty$ を実現する確率法則が次の正規分布で与えられる。

$$N(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(r-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{57}$$

ここで，平均 μ，標準偏差 σ，分散 σ^2 と呼ぶ。

上の正規確率変数には離散的な場合の重要な歩数である M は含まれていない。すなわち，連続的な表現では M を ∞ にしたものである。』

偏微分方程式である熱伝導方程式の解である式(5)と上記の式(57)とを比べてみると，まず非常に似ている式であることに気がつく。しかし，違いもあって，式(5)には変数 t が含まれているが，式(57)には含まれていない。すなわち，式(57)では M を ∞ にしたものであり，時間の項は消えている。しかしながら，式(5)には変数 t が含まれているが，その時間の変数 t は過渡応答を表す時間ではないことに注意すべきである。これは，フーリエ級数には時間の変数 t が含まれているが，過渡応答を表す時間ではないことにヘヴィサイドが気がつき，演算子法などの新しい数学を創る試みを行ったのと同様であると，私は考えている。

ランダムウォークの差分方程式で表したときの特長については，文献[16]で述べていて過渡現象が述べられている。それに対して，偏微分方程式の熱伝導方程式の過渡現象は考えられていないという違いがあると，私は考えているがいかがなものであろうか。

Ⅵ. シュレディンガー方程式の等価回路

現在，信号処理学会に連載している講義シリーズ「量子力学と信号処理」の目的の一つが，シュレディンガー方程式に回路理論が導入できることを示すことであり，かなり詳しく論じている。そこで，その講義シリーズから引用しながら，シュレディンガー方程式の回路理論を考えることにする。

第４回目[18]でシュレディンガー方程式を変数分離法を用いて，三角関数ではなく，exp(jωt) が求められるようにするために，次のように表されることが詳述されている。

$$-\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)\right]\Psi(x,t) \tag{58}$$

ここに，$U(x)$ はポテンシャル，m は有効質量である。エネルギー E の粒子は角周波数 ω の波動であり，ドブロイの関係式 $E = \hbar\omega$ を満たす。

第10回目[19]では，電信方程式と関連させながら，シュレディンガー方程式の等価回路を求めて，回路理論の応用に成功しているので，次に第10回目[19]を引用する。なお，式番号などは本論文の式番号に合わせている。

『式(58)で与えられるシュレディンガー方程式の解は，位置 x だけの関数と時間 t の関数とに分けられ，時間 t の関数 $\eta(t)$ は次のように表される。

$$\eta(t) = C\exp\left[j\frac{E}{\hbar}t\right] = Ce^{j\omega t} \tag{59}$$

ここに，C は定数である。

位置 x の関数を $\varphi(x)$ とすれば，式(59)を式(58)に代入して，次のように表される。

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)+(U(x)-E)\varphi(x)=0 \quad (60)$$

式(60)は２階の線形斉次微分方程式であるから，次のように置くことができる。

$$\varphi(x)=K\exp(\gamma x) \quad (61)$$

エネルギー E の粒子がポテンシャル $U(x)$ が一定の物質内でどのような振る舞いをするかを知るために，$E>0$ なる粒子が，

(a)　$U(x)=U_W$，$E>U_W$

(b)　$U(x)=U_b$，$E<U_b$

なるポテンシャルの物質内での振る舞いを求める。

(a) $U(x)=U_W$，$E>U_W$ における解

上の条件から，式(60)は次のように表される。

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)+(U_W-E)\varphi(x)=0 \quad (62)$$

上式に式(61)を代入すれば，

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\gamma^2+(U_W-E)=0 \quad (63a)$$

$$\therefore\quad \gamma=\pm j\frac{\sqrt{2m(E-U_W)}}{\hbar}=\pm j\beta_1 \quad (63b)$$

したがって，この場合の波動関数 $\varphi(x)$ の伝搬定数も位相定数 β_1 のみをもち，次のように表される。

$$\varphi(x)=A_W\exp(-j\beta_1 x)+B_W\exp(j\beta_1 x) \quad (64)$$

ここに，A_W，B_W は境界条件で定まる。

この物質は「量子井戸」と呼ばれ，光子の場合のガラスのような働きをする。

(b) $U(x)=U_b$，$E<U_b$ における解

上の条件から，式(60)は次のように表される。

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)+(U_b-E)\varphi(x)=0 \quad (65)$$

上式に式(61)を代入すれば，

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\gamma^2+(U_b-E)=0 \quad (66a)$$

$$\therefore\quad \gamma=\pm\frac{\sqrt{2m(U_b-E)}}{\hbar}=\pm\alpha \quad (66b)$$

したがって，この場合の波動関数 $\varphi(x)$ の伝搬定数は減衰定数 α となり，次のように表される。

$$\varphi(x)=A_b\exp(-\alpha x)+B_b\exp(\alpha x) \quad (67)$$

ここに，A_b，B_b は境界条件で定まる。

この物質内では電子は波動として伝わるのではなく，量子効果の一つであるトンネル効果として伝わることが知られていて，このポテンシャルの区間を「量子障壁」と呼ぶ。

上に求まった波動関数を用いて，前章で定義された確率密度および確率の流れを求めよう。

まず，量子井戸における波動関数は式(59)および(64)から次のように表される。

$$\Psi(x,t)=[A_W\exp(-j\beta_1 x)+B_W\exp(-j\beta_1 x)]e^{j\omega t} \quad (68)$$

したがって，その確率密度 $\rho(x,t)$ は，次式のように表される。

$$\rho(x,t)=|A_W|^2+|B_W|^2+Re[A_W{}^*B_W\exp(j2\beta_1 x)] \quad (69)$$

ここに，Re は[ ]内の実部を表し，Im は[ ]内の虚部を表す。

すなわち，確率密度 $\rho(x,t)$ の時間項 t は式から消える。したがって，次式のように表される。

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}=0 \quad (70)$$

この波動関数に対する確率の流れを求めよう。この場合，式(58)の時間項を含む１次元空間のシュレディンガー方程式に対する確率の流れ J は次のように表される。

$$J=\frac{\hbar}{2m(-j)}\left[\Psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)-\Psi(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Psi^*(x,t)\right] \quad (71)$$

上式に式(68)で表される $\Psi(x,t)$ を代入して，次の確率の流れを得る。

$$J=\frac{\hbar\beta_1}{m}[|A_W|^2-|B_W|^2] \quad (72)$$

この確率の流れ J は定数であるから，

$$div\,J=\frac{\partial}{\partial x}J=0 \quad (73)$$

を満たす。

上式は，確率の流れ J がすべての位置 x において定数となることを表していて，流れという定義には合わないように思われる。ところで，確率の流れ J は波動関数から導かれたもので，位置 x と時間 t との関数であるが，すべての位置 x で定数になるものが第９回目[20]に求められていて，それは「分布定数回路の単位素子上の有効電力」あるいは「方べきの定理と関係する有効電力」である。そのように考えると，１次元空間のシュレディンガー方程式を分布定数回路と対応させることが可能と考えられ，次章で検討する。

１次元空間のシュレディンガー方程式においては，量子障壁に対しても考察しなければならない。量子障壁における波動関数は式(59)および式(67)から次のように表される。

$$\Psi(x,t)=[A_b\exp(-\alpha x)+B_b\exp(\alpha x)]e^{j\omega t} \tag{74}$$

したがって，その確率密度 $\rho(x,t)$ は，

$$\rho(x,t)=Re[2A_bB_b{}^*]+|A_b|^2\exp(-\alpha 2x)+|B_b|^2\exp(2\alpha x) \tag{75}$$

となり，時間 t は式から消え，次式を得る。

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}=0 \tag{76}$$

この波動関数に対する確率の流れを求めよう。式(71)に式(74)で表される $\Psi(x,t)$ を代入して，次の確率の流れを得る。

$$J=\frac{\hbar\alpha}{m}Im[A_bB_b{}^*] \tag{77}$$

この確率の流れ J も定数であり，次式を得る。

$$div\,J=\frac{\partial}{\partial x}J=0 \tag{78}$$

（中略）

１次元のシュレディンガー方程式の波動関数を電信方程式の電圧に対応させて，次のように表すことが考えられる。

$$\Psi(x,t)=\upsilon(x,t) \tag{79}$$

また，上式のように波動関数と電圧とを対応させるのと同様に，波動関数から電流を次のように定義しよう。

$$i(x,t)=j\frac{\hbar}{m}\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t) \tag{80}$$

このように波動関数 $\Psi(x,t)$ から，電圧 $\upsilon(x,t)$ および電流 $i(x,t)$ を定義するなら，式(71)で定義される確率の流れ J は，文献[20]の式(9.4c)で与えられる方べきの有効電力と同等のものとなる。

$$J=Re[\upsilon^*(x,t)i(x,t)] \tag{81}$$

式(79)および式(80)の関係を用いて，式(58)のシュレディンガー方程式は次のように二つの式に分解される。

$$-\frac{\partial}{\partial x}\upsilon(x,t)=j\frac{m}{\hbar}i(x,t) \tag{82a}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}i(x,t)=2\left[\frac{\partial}{\partial t}-j\frac{U}{\hbar}\right]\upsilon(x,t) \tag{82b}$$

したがって，１次元空間のシュレディンガー方程式は文献[20]に示されているように虚数抵抗を用いた複素等価回路で表される。

ところで，シュレディンガー方程式を満足するエネルギー E の波動関数は式(58)で表わされるから，ドブロイの関係式に従う周波数変数 ω を，回路理論における角周波数とすることができて，回路表現できる。すなわち，電圧および電流を次のようにする。

$$\upsilon(x,t)=V(x)e^{j\omega t} \tag{83a}$$

$$i(x,t)=I(x)e^{j\omega t} \tag{83b}$$

これらの式を式(82)に代入して，次式を得る。

$$\frac{d^2}{dx^2}V(x)=\gamma^2V(x) \tag{84a}$$

$$\gamma^2=-2m(\hbar\omega-U)/\hbar^2 \tag{84b}$$

$x=0$, $x=l$ の２点間でポテンシャル U および有効質量 m が一定であるとすれば，

$$\begin{bmatrix}V_0\\I_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cosh\gamma l & Z_0\sinh\gamma l\\ Z_0^{-1}\sinh\gamma l & \cosh\gamma l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_l\\I_l\end{bmatrix} \tag{85}$$

なる縦続行列が得られる。ここに，

(i)　$m(\hbar\omega-U)>0$ の場合：

$$\gamma=j\frac{\sqrt{2m(\hbar\omega-U)}}{\hbar}=j\beta \tag{86a}$$

$$Z_0=\sqrt{\frac{m}{2(\hbar\omega-U)}}=R_0 \tag{86b}$$

(ii)　　$m(\hbar\omega - U) < 0$ の場合：

$$\gamma = \frac{\sqrt{2m(U-\hbar\omega)}}{\hbar} = \alpha \qquad (87a)$$

$$Z_0 = j\sqrt{\frac{m}{2(U-\hbar\omega)}} = jX_0 \qquad (87b)$$

(i)の場合は量子井戸であり，縦続行列は次のように表される。

$$\begin{bmatrix} \cos\beta l & jR_0\sin\beta l \\ \dfrac{j}{R_0}\sin\beta l & \cos\beta l \end{bmatrix} \qquad (88)$$

また，(ii)の場合は量子障壁であり，縦続行列は次のように表される。

$$\begin{bmatrix} \cosh\alpha L & jX_0\sinh\alpha L \\ \dfrac{-j}{X_0}\sinh\alpha L & \cosh\alpha L \end{bmatrix} \qquad (89)$$

』

以上文献[19]の一部を再録したようにシュレディンガー方程式から等価回路が得られ，その等価回路の縦続行列が式(85)などに得られている。式(85)の縦続行列は式(52)を満たすので相反回路であり，また，式(51)を満たすのでJ−ユニタリ行列でもあり，シュレディンガー方程式は相反で無損失な回路であるから極く一般的な回路となる。したがって，シュレディンガー方程式の量子力学的な解釈を見直す必要があるように感じられるがいかがなものであろうか。

Ⅶ. まとめ

偏微分方程式としてのシュレディンガー方程式は，時間項は１次の偏微分であり，位置の変数にかんする偏微分は２次であるから，偏微分の次数としては熱伝導方程式の次数と同じであるが，どうして波動方程式と同様の等価回路が得られるのであろうか？

この問に対しての答えは，時間変数の偏微分の項の係数が虚数となっていることである。すなわち，変数分離法を適用して時間項の偏微分が２次であれば，sin や cos の三角関数で表すことも可能になるが，時間項の偏微分が１次でその係数が虚数であるため，exp(jωt) のみとなり，複素数でなければならない。そのため，シュレディンガー方程式に定義される確率の流れが回路理論における有効電力そのものとなる。

このように，シュレディンガー方程式といえども量子力学の方程式とは見ないで，偏微分方程式の性質のみを考え，回路理論を応用するとどのようになるかを考えると，従来とは異なる解釈ができることもあり，それが物理現象を的確に表すこともあると考えられないであろうか。

〔追記〕

1985年からはじめた複素数ウェーブディジタルフィルタの考えを，いつの間にかシュレディンガー方程式への回路理論の応用に向かい，その結果，量子力学への回路理論の応用へと向かった私のライフワークを，真面目な学生が多いここ北星学園大学で，若い学生から若さと勇気をもらいながら続けることができ，本当に幸せでした。

現在の量子力学に疑問をもち，回路理論の創始者である Oliver Heaviside ならどのように考えたであろうかと想像をたくましくしながら，北星論集に論説を書きましたが，その論説が今回で９回目になっていることに驚いています。私の量子力学の考えは異端の科学に属していて，気にとめる方もいないと思いますが，現在の量子力学については，アインシュタインもシュレディンガーもディラックも，とにかく疑問をもったことのある理論体系であり，改めて考察する余地のある理論体系であると信じています。

回路理論を用いるとこのように考えられるということを北星論集にまとめてきましたが，残してきた問題としては，非線形波動の「ソリトン」があり，これも電圧波と電流波との２つの関数で考えてみたいと思っていました。すなわち，ソリトン波としてエネルギーが伝

わるのは２つの関数の位相がそろったときではなかろうかと考えています。

現在，量子コンピュータ，量子情報，量子暗号などなどの研究が盛んで，それらの研究に異論をはさむ余地はまったくないような時代です。このようなときに，異論を書くことには多少の勇気が必要で，北星学園大学に勤めて，若い人から勇気をもらいながら書くことができたことに感謝しております。また，教職員の方々にもなにかとお世話になりましたことに深く感謝申し上げます。

量子力学を見直すなどということは考えられないことかもしれませんが，もしもそのような必要が生じることがあるとすれば，私の理論が役立つのではないかとの，秘かな期待を膨らますことができました。

この量子力学が成立したのは，1925年といわれていますが，その年は Heaviside が亡くなった年でもあります。2025年は量子力学の誕生から100年の記念の年で，もしも量子力学が見直す必要が生じるとすれば，この年の頃ではないかとも思い，量子論について私は考え続けてゆきたいと思い続けております。とにかく，今年で北星学園大学を退職しますが，ここで私のライフワークを続けることができましたことに，心から感謝申し上げます。北星学園大学の一層のご発展を心より祈念しております。

参考文献

[1] 永井信夫：講義シリーズ量子力学と信号処理　第19回　波動方程式の諸性質に基づくシュレディンガー方程式の再考，Journal of Signal Processing（信号処理），Vol.6, No.5，pp.289-298, Sept. 2002

[2] 永井信夫：分子の運動方程式を表現する等価回路，北星学園大学経済学部北星論集，45，2，pp.41-56, 2006年３月

[3] 永井信夫：波動回路の共鳴現象と固有値問題を流体力学を基にして考える，北星学園大学経済学部北星論集，46，1，pp.81-93, 2006年９月

[4] 俣野博・神保道夫：熱・波動と微分方程式（現代数学への入門），岩波書店，2004

[5] 尾畑伸明：確率統計要論（確率モデルを中心にして），牧野書店，2007

[6] 石村貞夫，石村園子：ブラック・ショールズ微分方程式，東京図書，1999

[7] 永井信夫：回路理論の立場から観たマクスウェル方程式の特徴ーオリヴァ・ヘヴィサイドの見つけたことー，北星学園大学経済学部北星論集，43，2，pp.1-17, 2004年３月

[8] 永井信夫：マクスウェル方程式に基づく波動方程式の一般化－回路理論的考察ー，北星学園大学経済学部北星論集，42，2，pp.43-58, 2003年３月

[9] DARLINGTON MEMORIAL ISSUE, IEEE Trans. Circuits Syst. I: Fundamental Theory Appl., Vol. 46, No.1, Jan. 1999

[10]S.Matsumae u. A.Matsumoto: Doppelfilter, E.N.T.（Elektrishe Nachrichiten Technik），Bd.11, H.5, 1934.05

[11]エレクトロニクス発展のあゆみ調査会編：エレクトロニクス発展のあゆみ　資料編，東海出版社，2004

[12]A. Matsumoto（ed.）: Microwave Filters and Circuits, Academic Press, 1970

[13]永井信夫：講義シリーズ量子力学と信号処理　第15回　回路理論の特徴をよく表す縦続行列，Journal of Signal Processing（信号処理），Vol.6, No.1，pp.17-26, Jan. 2002

[14]A. V. Efimov and V. P. Potapov：J-expanding matrix functions and their role in the analytical theory of electrical circuits，Usp. Mat. Nauk，pp. 65-130，1973.

[15]たとえば　別冊『数理科学』　群とその応用ー対称性と自然の摂理ー，サイエンス社，1991.10

[16]永井信夫：ランダムウォークおよび波動の伝搬に対する離散時間解析，北星学園大学経済学部北星論集，44，1，pp.1-13, 2005年９月

[17]保江邦夫：確率微分方程式ー入門前夜ー，朝倉書店，1999
[18]永井信夫：講義シリーズ量子力学と信号処理　第４回　シュレディンガー方程式による電子の反射・透過，Journal of Signal Processing（信号処理），Vol.2，No.4，pp.276-285，July 1998
[19]永井信夫：講義シリーズ量子力学と信号処理　第10回　シュレディンガー方程式の複素等価回路，Journal of Signal Processing（信号処理），Vol.3，No.5，pp.315-324，Sept. 1999
[20]永井信夫：講義シリーズ量子力学と信号処理　第９回　分布定数回路に対するエネルギーの保存則，Journal of Signal Processing（信号処理），Vol.3，No.4，pp.249-258，July 1999

［Abstract］

A Peculiarity of Schrödinger's Equation as a Partial Differential Equation Viewed from Circuit Theory

Nobuo NAGAI

Since heat and diffusion equations are presented with time partial differentiation of the first order, they are called parabolic type. Since the wave equation is presented with time partial differentiation of the second order, it is called hyperbolic type. Since Schrödinger's equation is presented with time partial differentiation of the first order but the coefficient is a purely imaginary number, the time term is written by exp (j ω t), and Schrödinger's equation yields to an expansion of the wave equation. That is, Schrödinger's equation has two variables, voltage wave and current wave obtained by applying the circuit theory.

Key Words：Circuit Theory for Patial Differential Equation, Heat Conduction Equation, Schrödinger's Equation, Maxwell Equation, Wave Equation.