波動回路の共鳴現象と固有値問題を流体力学を基にして考える

永　井　信　夫

目次

Ⅰ．はじめに

通常の回路理論というと集中定数回路の理論のことをいう。集中定数回路の解は，過渡項と定常状態の項との和で表される。これは微分方程式の解が斉次方程式の一般解と非斉次方程式の特殊解との和で表されることによる。すなわち，斉次方程式の一般解が過渡項であり，非斉次方程式の特殊解が定常状態の項である。このように集中定数回路においては，過渡項と定常状態の項を明確に区別している。

一方，マイクロ波回路や光回路のような波動回路に対しても，過渡項と定常状態の項を通常の教科書で明確に区別しているかと問われれば，実は，区別しているとはいえないと私は思っている。すなわち，波動回路は偏微分方程式で表され，偏微分方程式の解は，初期条件や境界条件を用いて積分で表される。境界条件は定常状態の解のみを求めることになっていて，実は過渡項を求めようとはしていない。また，初期条件の解はラプラス変換における変数ｓの解に対しては適当であるが，変数が指数関数の解に対しては適当であるとは考えられない。

本文は，目に見える流体力学の一問題を手がかりにして，それを回路理論的に考察する手法を用いて，流体力学にも過渡状態があることを示し，過渡状態が終わったときから定常状態となることを示し，流体力学におけるこの物理現象に基づいて，波動回路の過渡応答と定常状態，および共鳴現象と固有値問題を考えることに応用する。

Ⅱ．流体力学における一問題

文献［1］では，『私たちの身のまわりの現象はすべて流体力学だ，と言っても過言ではありません。』という文章からはじまって，流体力学を易しく解説している。この文献［1］の中に，回路理論で用いられる「過渡現象」と「定常状態」とをよく表すと考えられる現象が述べられているので，引用するには少し長く感ぜられるが，極めて適切な例題と考えられるので，文献［1］の31ページか

キーワード：浴槽に水を張る問題，過渡現象と定常状態，波動回路の共鳴現象，
　　　　　　波動回路の固有値問題，電力の閉じ込めと無効電力

ら41ページまでの『3　浴槽に水を張る』の関係する部分を引用する。

『　3　浴槽に水を張る

水を張る問題

数年前のある中学校の入試問題である。図1に示す浴槽は給水蛇口から一定の割合で水を入れると2時間で満杯になる大きさである。また，排水口は満杯の浴槽をからにするのに3時間かかる。ある日，浴槽に水を張ろうとしてうっかり排水栓を閉じるのを忘れてしまった。浴槽は蛇口を開いてから何時間後に一杯になるでしょうか？

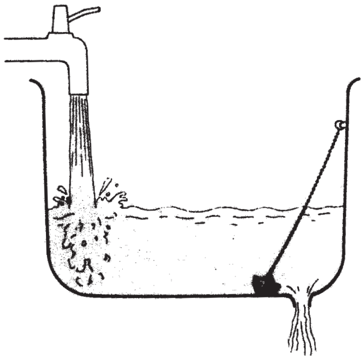

図1　排水口を開いたまま浴槽に給水する
Fig.1 With water running both from the faucet and down the drain.

正解？

この問題の出題者はおそらく次のような解答を期待していたであろう。

この蛇口からは1時間に浴槽全体1/2の水が入る。排水口からは1時間につき浴槽の1/3の水が出ていく。したがって，蛇口と排水口の両方を開くと1時間に浴槽の

$$1/2-1/3=1/6$$

の水がたまっていくから，浴槽は6時間で満杯になる。答，6時間。

一見これで良さそうに思われるが，この問題はそう簡単ではなかった。実はこの場合，浴槽はいつまでたっても一杯にはならないのである。正解は後で述べることにして，まず流体力学の重要な基本法則の一つ，流体運動におけるエネルギー保存則を紹介しよう。

エネルギー保存則

ボールを斜めに放り上げるとボールは放物線の軌道を描く。（実際は，空気の抵抗などで放物線から少しずれるが，ここではまわりの空気の運動は無視できるとし，ボールには重力のみが作用していると考えている。）ボールの速さはボールが高く上がるにつれて小さくなり放物線のてっぺんで最小になる。その後，地上に向かい徐々に速さを増し，肩の高さまで落ちてきて投げたときの速さにまで回復する。ボールの速さと地上からの高さは以上に述べる「力学的エネルギー保存則」によって関係づけられている。

いま，ボールの質量をm，速さをu，地上からの高さをh，また重力加速度をgとすると，ボールの運動エネルギーは$(1/2)mu^2$で，また位置エネルギーはmghと表される。この運動エネルギーと位置エネルギーはどちらもボールの運動にともなって増減するが，両者の和（力学的エネルギー）は不変，すなわち

$$(1/2)mu^2+mgh=\text{一定} \qquad (1)$$

が成り立っている。したがって，hが小さいところではuは大きくなる。遊園地のジェットコスターが高いところでは比較的ゆっくり動いているが，低いところにくるとスピードを増すのも同じ理屈である。

力学的エネルギー保存則(1)は，ニュートンの運動方程式の第一積分として導かれるもので，ボールに限らず運動する物体すべてに適用され，質点力学系の大域的なふるまいを議論するのに重要な役割を演じている。それでは，流体運動においてはエネルギー保存則はどのような形をとるであろうか。

ベルヌーイの定理

話を簡単にするために，ここでは重力場の中で運動する縮まない完全流体の定常流れを

考える。流れ場の中に流線によって囲まれた細い管状領域（流管）を選び，二つの断面 A と B で切り取る。重力は鉛直下方（マイナス z 方向）を向いているとし，重力加速度を g で表す。流体の密度を ρ，面 A の中心の z 座標，面上の流速，圧力をそれぞれ z_A，u_A，p_A，また面 B のそれらをそれぞれ z_B，u_B，p_B とする。このとき，A と B における流体の単位体積あたりの運動エネルギーと重力の位置エネルギーの和はそれぞれ

$$(1/2)\rho u_A^2 + \rho g z_A$$

と

$$(1/2)\rho u_B^2 + \rho g z_B$$

である。さて，微小時間 Δt 後に面 A と B がそれぞれ Δl_A と Δl_B だけ動いて面 A′ と B′ に来たとしよう。この間の流管 AB 内の運動エネルギーと位置エネルギーの和の増加分は，BB′ 間のエネルギーと AA′ 間のエネルギーの差

$$\{(1/2)\rho u_B^2 + \rho g z_B\} S_B \Delta l_B$$
$$- \{(1/2)\rho u_A^2 + \rho g z_A\} S_A \Delta l_A$$

となり，これはまた圧力によってなされた仕事

$$p_A S_A \Delta l_A - p_B S_B \Delta l_B$$

に等しい。流体は縮まないから，

$$p_A S_A \Delta l_A = p_B S_B \Delta l_B$$

が成り立ち，

$$(1/2)\rho u_A^2 + \rho g z_A + p_A =$$
$$(1/2)\rho u_B^2 + \rho g z_B + p_B$$

すなわち，

$$(1/2)\rho u^2 + \rho g z + p = 一定 \qquad (2)$$

を得る。式(2)の各項はそれぞれ単位体積あたりの運動エネルギー，位置エネルギーおよび圧力エネルギーを表す。質点力学系における力学的エネルギー保存則(1)に圧力エネルギーの項が付け加わっていることに注意されたい。式(2)はこれら 3 種類のエネルギーの和が一つの流線に沿って一定であることを述べている。これが流体運動のエネルギー保存則を表す「ベルヌーイの定理」である。

（中略）

トリチェリの定理

水槽の下部にあいた小さな排水口から流れ出る水の速さを求めよう。水槽に比べて排水口が十分小さければ，流れはほとんど定常であると考えられ，ベルヌーイの定理が適用できる。排水口から測った水面の高さを h としよう。水面での流速はほとんどゼロである。また圧力は水面でも排水口でもともに大気圧 p_0 に等しい。排水口における水の速さを u とすればベルヌーイの式(2)より

$$u = \sqrt{2gh} \qquad (3)$$

を得る。つまり，流出速度は水深の平方根に比例する。これは重力場 g の中で高さ h から落とされた物体の得る速度と同じで，「トリチェリの定理」として知られている。

水はあふれなかった

冒頭に紹介した問題を振り返ってみよう。浴槽の容積を V，排水口を閉じたとき，給水蛇口からの水で満杯になる時間を T_{in} とすると，単位時間あたりの給水量は

$$Q_{in} = V/T_{in}$$

で，これは時間的に一定である。一方，トリチェリの定理によれば排水口から流出する水流の速度は水深の平方根に比例して変化し，流出量は時間変動を考慮することがこの問題を解くカギだったのである。

さて，蛇口を閉じたとき，満杯の水を全部排出するのにかかる時間を T_{out} とすると，単位時間あたりの流出水量は浴槽にたまっている水量 v を用いて

$$Q_{out} = \frac{2\sqrt{vV}}{T_{out}}$$

と表されることが簡単な計算からわかる。

（ $Q_{out} = \alpha\sqrt{v}$ （α は定数）

とおいて，

$$\mathrm{d}v = -Q_{out}\mathrm{d}t$$

を積分し，t がゼロのとき v が V で，t が T_{out} のとき v がゼロとすればよい。）

さて，微小時間 $\mathrm{d}t$ に増加する水量を $\mathrm{d}v$

とすると，

$$(Q_{\mathrm{in}}-Q_{\mathrm{out}})\mathrm{d}t=\mathrm{d}v$$

なる関係がある。これを積分すると，給水蛇口と排水口とを同時に開いたとき満杯になるのにかかる時間 T が次のように求まる。

$$\frac{T}{T_{\mathrm{out}}}=-\frac{T_{\mathrm{out}}}{2T_{\mathrm{in}}}\log\left(1-\frac{2T_{\mathrm{in}}}{T_{\mathrm{out}}}\right)-1 \quad (4)$$

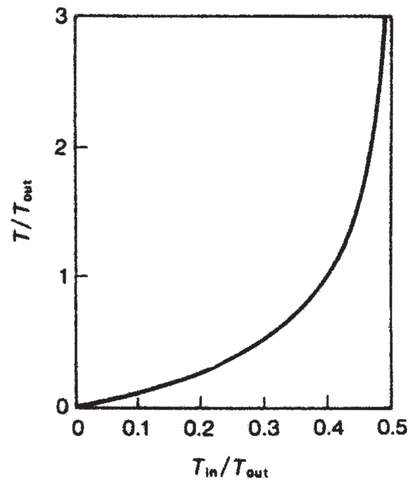

図2　給水口と排水口を同時に開いたとき，浴槽が満杯となる時間
Fig.2 The time necessary to fill up water to the bathtub.

これを図示すると図2のようになるが，

$$T_{\mathrm{in}}/T_{\mathrm{out}} \geqq 1/2 \quad (5)$$

ではいつまでたっても満杯にはならないことがわかる。このときは，$Q_{\mathrm{in}}=Q_{\mathrm{out}}$ となるところ，すなわち

$$v=\left(\frac{T_{\mathrm{out}}}{2T_{\mathrm{in}}}\right)^2 V \quad (6)$$

までしかたまらない。いまの問題では，

$$T_{\mathrm{in}}/T_{\mathrm{out}}=2/3>1/2 \quad (7)$$

であるのでいつまでたっても浴槽は満杯にならないのである。』

以上の文がどのように回路理論と関係するかを次章で考えてみよう。なお，「浴槽に水を張る問題」を以下では「浴槽問題」と簡略化して呼ぶ。

Ⅲ．浴槽に水を張る問題と回路理論との関係

回路理論はフィルタの設計理論から発展したといえる。フィルタは伝送線路上を特定の周波数の信号を効率よく通したり，ある周波数の信号はカットしたりする理論の構築から始まったといえる。この回路を集中定数回路素子で構成するために，集中定数の回路の理論が回路理論の主体となった。この集中定数回路は常微分方程式で表される。

一方，マイクロ波回路や光回路などの波動回路は，マクスウェル方程式や電信方程式という時間 t と位置 x という変数をもつ偏微分方程式で表されるため，1/2 波長や 1/4 波長というようにある長さをもつ共鳴器などの回路が用いられる。このように波動回路は大きさがあるという特長がある。

浴槽問題も時間と水の高さを求める必要があり，大きさがある点に共通点がある。そのため，本文では波動回路と浴槽問題との関係を考える。

3.1　入力と出力

効率よく信号を通したり，ある周波数の信号はカットしたりする回路は普通，コイルとコンデンサとの共振回路を用いて構成され，微分方程式で表される。微分方程式の解は，斉次方程式の一般解と非斉次方程式の特殊解との和で表される。ここに，非斉次方程式の特殊解は入力があるために，その応答，すなわち，出力が求められる。このように微分方程式で表される集中定数回路では，式の中に入力と出力が表されている。

それに対して，マクスウェル方程式などの偏微分方程式で表される回路では，式の中に入力がハッキリと表されているわけではない。そのため，初期値問題や境界値問題として与えられる。この偏微分方程式の初期値問題や境界値問題は回路理論の用語を用いると「定

常状態」の解を与えることになるので，その説明のために，「浴槽問題」を考えよう。

「浴槽問題」では，式(5)の $T_{\mathrm{in}}/T_{\mathrm{out}} \geqq 1/2$ の場合には満杯にならないと書いてあるが，その場合どのようになるのであろうか。例えば，式(7)を満たす $T_{\mathrm{in}}/T_{\mathrm{out}} = 2/3$ の場合を考えてみよう。

式(7)を式(6)に代入すると，

$$v = \frac{9}{16}V \tag{8}$$

となり，浴槽における水量が一定となる。すなわち，給水量と排水量とが等しくなる。

ここで，式(5)とは逆の場合は満杯になるが，浴槽の高さがより高くなっていて，その体積が V より大きいとき，どうなるかを考えておこう。例として次の場合を考える。

$$T_{\mathrm{in}}/T_{\mathrm{out}} = 1/3 \tag{9}$$

この関係を式(6)に代入して，次式を得る。

$$v = \frac{9}{4}V \tag{10}$$

すなわち，浴槽における水の高さが2.25倍になれば，給水量と排水量とが等しくなる。

ところで，式(5)において，

$$T_{\mathrm{in}}/T_{\mathrm{out}} = 1/2 \tag{11}$$

の場合も満杯になることがないと書いてあるが，式(11)を式(6)に代入すると，V になる。これはどのような意味を表しているのだろう。

すなわち，式(11)を満たす場合は，丁度満杯になったとき，給水量と排水量とが等しくなるが，その状態にはならないことを示している。これは集中定数の回路理論の「過渡状態」と「定常状態」で説明されるので，次節で説明する。

ところで，集中定数回路素子による共振現象は教科書に述べられている。それに対して，分布定数回路の共鳴現象は等価的に集中定数回路素子に置きかえた回路で表現し，集中定数回路の共振現象として説明されている。また，分布定数回路の過渡現象はパルスが入力されたときを取り扱っていて，正弦波入力に対する過渡現象は記述されていない。

分布定数回路の共鳴現象は，ここで考えている浴槽問題を例にすると分かり易い。すなわち，浴槽問題では

$$T_{\mathrm{in}}/T_{\mathrm{out}} < 1 \tag{12}$$

の場合，給水量が一定のとき，給水量と排水量とが等しくなり，浴槽の中の水の量は一定に保たれる。

一方，分布定数回路においては，単位時間当たりのエネルギーが一定のエネルギーが入力され続けて，その入射されるエネルギーと等しいエネルギーが出力されるのは極めてまれな場合であり，それを「共鳴」と呼ぶ。したがって，共鳴現象は定常状態での現象である。

3.2　過渡状態と定常状態

集中定数回路は微分方程式で表され，微分方程式の解は斉次方程式の一般解と非斉次方程式の特殊解との和で表されるが，斉次方程式の一般解は一般に指数関数的に減衰する式で表される。この項は過渡応答で数式としては指数関数で表されるので，ゼロになることはないが，速やかにゼロに近づく。すなわち，時間が経過すると，非斉次方程式の特殊解になり，この特殊解は集中定数回路の「定常状態」を表している。

ところで，「浴槽問題」において，浴槽が空の状態から給水がはじまり，給水量と排水量とが等しくなる状態になるまでには，時間が必要である。この時間内の状態は「過渡現象」を表していると私は考えている。

なお，「浴槽問題」のベルヌーイの定理のところで，「定常流れ」，およびトリチェリの定理のところで，「ほとんど定常」というように「定常」という用語を用いているが，この「定常」の意味するところを回路理論の用語を用いると「理想化」にあたる。このように物理学で用いる定常は回路理論での用語としては定常状態を意味しないことがあるので，

注意が必要である。

一方，分布定数回路においては，集中定数回路とは異なり，過渡現象と定常状態との区別がはっきりしているとは限らない。それは，偏微分方程式の解法が積分を用いることに関係しているからである。すなわち，波動の入力に対しては偏微分方程式の初期値問題は過渡応答を与えない。また，偏微分方程式に対する境界値問題は定常状態を与えることが多いことを注意しておく。

分布定数回路の過渡状態と定常状態については次章で述べるが，ここでは，浴槽問題と分布定数回路との違いを簡単に考えておく。

回路理論において，ブラックボックス内が空の状態から一定の入力が入り始めて，入力と出力とが等しくなってブラックボックス内が一定となるとき，「定常状態」になったという。そのため，空の状態から一定になるまでの間は「過渡状態」である。

回路理論の柱ともいうべきフィルタの理論では，一定の入力があるとき，とにかく一定の出力となっているとき「定常状態」になっているという。したがって，浴槽問題では入力の給水量 Q_{in} は時間的に一定であるから，回路理論の入力となりうる。一方，浴槽問題での出力は時間的に変化しているから，この問題では過渡応答を求めていて，定常状態は求めていない。しかしながら，実は式(5)は流出水量と給水量とが等しい水量を示しているから，その水量で一定になることを示していて，定常状態になることを示している。

回路理論では入力エネルギーと出力エネルギーとが等しいとは限らない。ブラックボックスの中でエネルギーが消費されない「無損失回路」であっても，いわゆる定常状態で反射量があり，入力では最大有能電力の一部しか出力しないで定常状態になりうる。したがって，ブラックボックスが「無損失回路」であって，しかも入力エネルギーと出力エネルギーとが最大有能電力となって等しい場合は特殊な関係であり，それを「共鳴現象」と呼んでいる。

Ⅳ．波動回路の特長

マクスウェル方程式や無損失電信方程式という偏微分方程式で表される波動回路は，エネルギーの伝達という点で集中定数回路とは少し異なると考えた方がよいことを文献［2］―［4］などでたびたび述べてきた。また，波動回路では反射が生じるために，入力に関して浴槽問題とは少し異なると考えた方がよいと考えられる。そのため，ここでは浴槽問題と比較できる点に限って，波動回路の特長を改めて考えておく。

4.1 波動回路の入力と出力

回路理論の一般的な動作は文献［2］で説明されている。すなわち，回路は信号やエネルギーを伝える媒体を「ブラックボックス」とし，信号を送り出す「入力源」と，その信号に対して周波数特性をブラックボックスで付加されたものを受け取る「負荷」とが三位一体となって望まれる特性を実現するものと考えることができる。

また，集中定数回路では，LC共振を用いてフィルタなどの信号処理回路が構成されていると考えられる。それに対して，伝送線路を回路素子とする分布定数回路などでは，反射透過特性を利用して，入力電力としての信号を処理するために，入力電源と負荷が重要となる。そのことを説明するために，図3を用いる。

図3に示す回路の電源は，電圧 E_G と内部抵抗 R_G を持つ電圧源である。この電圧源に対しては，負荷として抵抗 R_G を直接接続すれば，最大の消費電力を負荷に供給できる。そのため，そのときの電力を最大有能電力と呼び，次式で与えられる電力である。

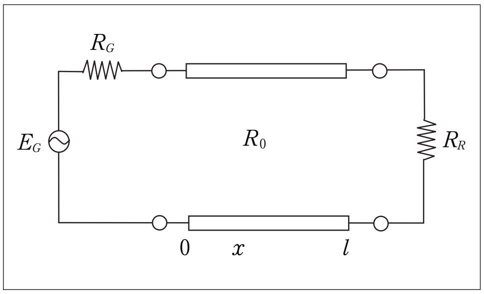

図 3　単位素子を回路素子として用いた回路
Fig.3 A circuit using a unit element

$$\text{最大有能電力}：\frac{|E_G|^2}{4R_G} \tag{13}$$

なお，負荷抵抗を R_G 以外に選んだときの消費電力がどのように減っていくかは文献［5］に述べている。

「浴槽問題」では浴槽に水をためることにより，排出口における流出水量を調節しているとも言える。波動回路では浴槽に換わるものが分布定数回路素子である。すなわち，図 3 におけるブラックボックスには，分布定数回路である伝送線路を用い，その長さは l とし，それを単位素子と呼ぶ。回路理論においては縦続行列が重要であり，単位素子の縦続行列は次式のように表される。

$$\begin{pmatrix} V_G \\ I_G \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda R_0 \\ \frac{\lambda}{R_0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_R \\ I_R \end{pmatrix} \tag{14a}$$

ここに，λ はリチャーズの変数と呼ばれ，次のように表される純虚数である。ただし，信号処理で用いられる z 変換の z^{-1} に合わせているので，次式のように表す。

$$\lambda = \tanh j\beta l = \tanh \frac{sT}{2}$$

$$= j \tan \frac{\theta}{2} \tag{14b}$$

図 3 における単位素子の特性インピーダンス R_0 を電圧源の内部抵抗 R_G より大きい値に選べば単位素子に電圧波をため込み，R_0 を R_G より小さい値に選べば単位素子に電流波をため込むことに相当する。そのため，浴槽問題の給水と排水の水量とは異なる共鳴現象での電圧と電流とになることを示す。

図 3 における R_0 を R_G と異なる値にすると，入力ポートで反射波が生じる。また，R_0 と負荷抵抗 R_R とが異なる値であれば，負荷端（出力ポート）においても反射波が生じて，文献［3］，［4］に示す多重反射という過渡応答を繰り返した後に，定常状態になる。

図 3 に示す回路では，電圧源の内部抵抗 R_G は単位素子の長さにしたがって負荷で見込む出力インピーダンスが R_G から $R_0{}^2/R_G$ まで変化する。この出力インピーダンスの共役複素数に等しいインピーダンスを負荷インピーダンスとしたときに共鳴することになり，最大有能電力が負荷に供給される。すなわち，共鳴するように負荷が選ばれている場合は，最大有能電力が負荷で消費されるようになったときから定常状態であり，空などの状態から定常状態に至るまでの間は過渡状態あるいは非定常状態である。

4.2　波動回路の共鳴現象

浴槽問題での定常状態は給水口と排水口との水量が等しいときである。それに対して図 3 に示す回路における共鳴していて負荷で消費される電力が最大有能電力のときであっても，負荷における電圧と電流は，電圧源に直接 R_G を接続した値とは異なることもあることも後で示すが，まず，電圧源に直接 R_G を接続したときの負荷の電圧 V_R および電流 I_R を求めておこう。すなわち，それらは次のように求まる。

$$V_R = \frac{E_G}{2} \tag{15a}$$

$$I_R = \frac{E_G}{2R_G} \tag{15b}$$

よって，その電力は

$$V_R I_R{}^* = \frac{|E_G|^2}{4R_G} \tag{15c}$$

と求まり，最大有能電力に等しくなる。

ところで，図3に示す回路において，最大有能電力が負荷で消費される場合が次のように与えられている［2］。

（1）$\lambda = 0,\ \theta/2 = \mathrm{n}\pi(\mathrm{n} = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$R_G = R_R \tag{16a}$$

（2）$\lambda = \infty,\ \theta/2 = \pi/2 + \mathrm{n}\pi(\mathrm{n} = 0, 1, 2, \ldots)$:

$$R_G R_R = {R_0}^2 \tag{16b}$$

（3）$R_0 = R_R = R_G$ （16c）

上記の3つの共鳴の中で(1)および(3)の場合の負荷での電圧および電流は式(14)に等しくなる。

それに対して，(2)の場合の負荷における電圧と電流とを求めてみよう。

負荷における電流を I_R とすると，次式が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} E_G \\ I_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_G \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & jR_0 \\ \dfrac{j}{R_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{{R_0}^2}{R_G} I_R \\ I_R \end{bmatrix} \tag{17}$$

上式から I_R および負荷の電圧 V_R が次のように求まる。

$$I_R = \frac{E_G}{j2R_0} \tag{18a}$$

$$V_R = \frac{E_G R_0}{j2R_0} \tag{18b}$$

したがって，負荷の有効電力は，次のように求まり，最大有能電力に等しくなる。

$$V_R {I_R}^* = \frac{|E_G|^2}{4R_G} \tag{18c}$$

上の場合は，定常状態で共鳴している特殊な場合である。

上述の負荷抵抗であっても，入力に用いられている波動の波長が $\lambda = 0$ となっていれば，共鳴とはならない。その場合の定常状態における有効電力を一例として求め，共鳴とならないことを示しておこう。その場合の定常状態における負荷の電流 I_R および電圧 V_R は次式を満たす。

$$\begin{bmatrix} E_G \\ I_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_G \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{{R_0}^2}{R_G} I_R \\ I_R \end{bmatrix} \tag{19}$$

上式から負荷の電流 I_R および電圧 V_R が次のように求まる。

$$I_R = \frac{R_G E_G}{{R_0}^2 + {R_G}^2} \tag{20a}$$

$$V_R = \frac{{R_0}^2 E_G}{{R_0}^2 + {R_G}^2} \tag{20b}$$

したがって，負荷の有効電力は，次のように求まり，最大有能電力より小さい。

$$V_R {I_R}^* = \frac{R_G {R_0}^2 |E_G|^2}{({R_0}^2 + {R_G}^2)^2} < \frac{|E_G|^2}{4R_G} \tag{20c}$$

上述のように，浴槽問題では給水口の大きさと排水口の大きさとが違っていても，浴槽にたまる水量の圧力によって，給水量と排水量とが等しくなり，定常状態では浴槽の水量が一定となる。それに対して波動回路では，電圧と電流という2つの変数があり，その2つの変数の比であるインピーダンスに関する整合（インピーダンスマッチング）問題となり，周波数によって負荷への給電量が変化する「フィルタ」が構成される。

V．波動回路の固有値問題

5.1　浴槽への水の閉じ込め

ここで浴槽問題に戻って，前章までは浴槽の排水口が開いているときを考えたが，ここでは排水口が閉まっている場合を考えよう。

排水口が閉まっていて，給水口から給水されている場合には浴槽に水がためられて行く。ある程度水がためられたところで給水口が閉められたとするときは，浴槽に水がためられているが，その水は外部から何らかの手段で測定されなければ，そこに水がためられていることがわからない。

このようなことを波動回路に考えることができないであろうか。実はこのような問題が波動回路の固有値問題である。

5.2　定常状態の固有値問題

ところで，浴槽問題では排水口が閉じられ

ていれば給水した量だけ浴槽にためられるが，波動回路では特殊な条件のときにだけエネルギーがためられる。その一つの例が文献［2］に示されていて，図 4 に示す回路である。

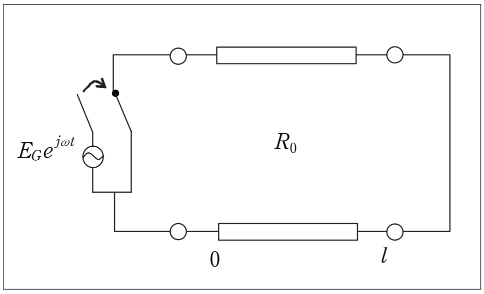

図 4　固有値問題を考える回路
Fig.4 A circuit for considering eigenvalue problem

図 4 に示す無損失回路と図 3 に示す回路とを比べると，図 3 に示す回路の電圧源の内部抵抗 R_G および負荷抵抗 R_R の両方がゼロになった回路が図 4 に示す回路である。

電圧源の内部抵抗 R_G がゼロならば，式(13)によって最大有能電力が ∞ となるから，負荷にいくらでも電力を供給できる。ところが，負荷抵抗 R_R もゼロであるから，負荷では有効電力を取り出すことができない。それでは電圧源から供給される電力はどうなるのであろうか。

図 3 に示す回路が特殊の場合に共鳴現象が現れたように，図 4 に示す回路が示す特殊な場合が「固有値問題」である。

すなわち，その単位素子の線路長が半波長になる周波数の入力波に対して，電圧の振幅が時間の経過と共に増大するし，最大有能電力が ∞ であるから，定常状態では無限大になるもので，集中定数回路で得られる固有振動とは異なる固有値問題であることを示している。すなわち，単位素子を用いた回路の固有値問題には種になる入力波が必要である。また，固有値以外の周波数の波を入力すると，単位素子内の電圧の振幅が定常状態で必ずしも 0 になるとはいえないことを示している。

このように，固有周波数でない波動を単位素子のみの無損失回路に入力すると回路内には固有周波数以外のエネルギーがあるために，ときどき固有周波数が現れるように表され，量子力学ではこれをエンタングルメントと名付けているように思われる。

ここで，固有値問題における電圧と電流との関係を求めておこう。単位素子の電圧および電流は次のように表される。

$$V(x) = K_a e^{-j\beta x} + K_b e^{-j\beta x} \tag{21a}$$

$$I(x) = \frac{K_a}{R_0} e^{-j\beta x} - \frac{K_b}{R_0} e^{j\beta x} \tag{21b}$$

この固有値問題は，入力が給電され続けると無限大の振幅となるので，ある程度入力されたところでスイッチを切り換える必要があり，図 4 にはスイッチが含まれている。そこで，入力と出力の条件を考えながら固有値問題を考えよう。

空間的に 1 次元の媒質が固有振動をしている場合は，媒質に対する境界条件が短絡や開放になったときであり，図 4 に示す回路で電源の電圧が 0 になったときの境界条件は次のように与えられる。

$$x = 0 \quad x = l \text{ で} \quad V(x) = 0 \tag{22}$$

この境界条件を式(21a)に代入して，次式の関係を得る。

$$K_a = -K_b \tag{23a}$$

$$-2jK_a \sin\beta l = 0 \tag{23b}$$

したがって，次の関係が得られる。

$$\beta l = \mathrm{n}\pi \tag{23c}$$

この場合，電圧と電流は次のようになっている。

$$V(x) = -2jK_a \sin\beta x \tag{24a}$$

$$I(x) = \frac{2K_a}{R_0}\cos\beta x \tag{24b}$$

この固有値問題では，文献［2］に示したように式(24)の電圧と電流との位相差が90°となっていて，有効電力は 0 になっている。したがって，固有振動は振幅が 0 ではないの

で，確かにエネルギーを持っているけれども，そのときの有効電力が0になっているので，エネルギーが固有振動している空間内に閉じ込められている。すなわち，固有振動していてもそのエネルギーは単位素子内にとじ込められていて，外部には全く影響を与えないから，外部では固有値以外の振動と同じくエネルギーの影響はない。

それでは，このエネルギーはどのようにして単位素子内に閉じ込められたのであろう。それを考えるために図4の回路の過渡応答を考えよう。

5.3　固有値問題の過渡応答

図3および図4に示す波動回路は，入射波，反射波および透過波で解析が行われる。その場合，回路理論を除いた物理学では入射波は適当に与えられることが多い。回路理論においては電源が与えられるので，その電源で入射波が与えられる。そこで，まず図3に示す回路の入射波を求めておこう。

電圧源における電圧入射波 V_i および電流入射波 I_i は式(18c)に示した最大有能電力から次のように求まる。

$$V_i = \frac{E_G}{2} \tag{25a}$$

$$I_i = \frac{E_G}{2R_G} \tag{25b}$$

回路理論を除く他の物理学では，波動の取り扱いを唯一つの関数のみで考える。これは，例えば光学では電場と磁場とを別々に測定できないので，電場と磁場との積である強度を用いて，その強度の平方根を標準的な唯一つの関数と考える。これは文献［6］に述べたウェーブディジタルフィルタを回路理論の代表と考えたとして，電圧あるいは電流を唯一つの関数に選ぶならば，エネルギーを表すものがなくなってしまう。そのため，電圧および電流を正規化した波（正規波という）が必要となる。正規波はユニタリ性を用いてエネルギーが表されている。このように，正規波はヒルベルト空間の関数となることが数学的に示される。

ヒルベルト空間などの数学的な空間では与えられる関数は一つであるから，入射波は正規波の入射波となり，次のように与える。

$$W_i = \frac{E_G}{2\sqrt{R_G}} \tag{25c}$$

ところで，図4に示す回路においては，電圧源の内部抵抗 R_G はゼロなので，電流および正規波の入射波は求まらない。したがって，図4に示す回路の過渡応答も含めた解析は注意が必要である。

図4に示す回路においては，電圧源に直接特性インピーダンス R_0 に等しい抵抗を接続する。そうすれば，その抵抗の電圧 V_t は

$$V_t = E_G \tag{26a}$$

となり，その抵抗に流れる電流は次のように求まる。

$$I_t = \frac{E_G}{R_0} \tag{26b}$$

この電圧と電流が単位素子内に給電される入力電圧と入力電流である。

ここで，図4に示す回路の固有値問題は式(23)で与えられているので，入力波が1往復したときの過渡応答を求めてみよう。

電圧進行波の振幅 K_a は E に等しく，単位素子から負荷のゼロの抵抗への反射係数は－1であり，単位素子から電源端のゼロの内部抵抗への反射係数も－1であるから，電圧 $V(x)$ および電流 $I(x)$ は式(21)を用いて次のように求まる。

$$\begin{aligned} V(x) &= E_G e^{-j\beta x} - E_G e^{j\beta x} \\ &= -2jE_G \sin\beta x \end{aligned} \tag{27a}$$

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{E_G}{R_0} e^{-j\beta x} + \frac{E_G}{R_0} e^{-j\beta x} \\ &= \frac{2E_G}{R_0} \cos\beta x \end{aligned} \tag{27b}$$

この回路では1往復後の波の位相は 2π であるから，往復の回数だけ振幅は大きくなる。

したがって，スイッチを閉じて入力をゼロにしなければ，振幅はどんどん増える。ただし，往復する波の重なりで電圧と電流との位相は90°異なることになり，電力は無効電力となり，単位素子内に閉じ込められる。

ここで注意すべき点は，入力の電圧にはゼロとなることがないが，固有値の電圧には常にゼロとなる点が単位素子内にあることである。次節では固有値問題には，電流がゼロになる場合があることを示す。

5.4　開放端子も含むときの固有値問題

図4に示す以外にも固有値問題があり，その一つが図5に示す回路である。

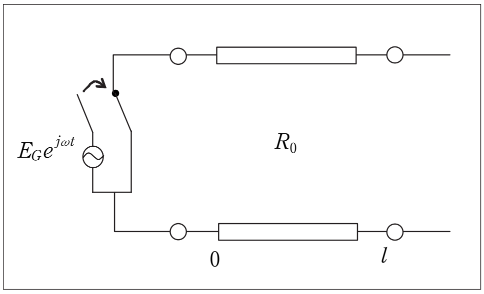

図5　片側開放の固有値問題
Fig.5 Eigenvalue problem with open circuit.

図5に示す回路で電源の電圧が0になり，終端の電流が0となる境界条件は次のように与えられる。

$$x=0 \quad \text{で} \quad V(0)=0 \tag{28a}$$

$$x=l \quad \text{で} \quad I(l)=0 \tag{28b}$$

この境界条件を式(21)に代入して，次式の関係を得る。

$$K_a = -K_b \tag{29a}$$

$$\frac{K_a}{R_0}\cos\beta l = 0 \tag{29b}$$

したがって，次の関係が得られる。

$$\beta l = nx + \frac{\pi}{2} \quad (n=0,1,2,\dots) \tag{29c}$$

この場合，電圧と電流は式(24)とまったく同じ式となる。すなわち，図4に示す回路の単位素子の

$$\beta l = \frac{\pi}{2} \tag{30}$$

における電流を求めるとゼロとなっていて，図5に示す回路は図4に示す回路の電気長がπから$\pi/2$となっていることになる。そのため，図5の回路の過渡応答は図4に示す回路とほとんど同じようになる。

このように，固有値問題には常に電流がゼロになる場合もあることが示されたので，左右両方の端子共に開放で電流がゼロの場合も考えられよう。その場合は電流源を用いれば得られる。その場合の過渡応答も上述の多重反射で得られることも理解できるであろう。

5.5　固有振動での解析に対する疑問

前節までに波動回路の固有値問題を考えた。すなわち，固有値問題の特徴として，エネルギーは無効電力となって移動することなく単位素子内に閉じ込められ，電圧および電流がそれぞれゼロになる点が単位素子内に存在することが明らかとなった。

ところで，文献［7］，［8］で，分子などの振動が論じられ，波動関数は固有振動で解析されている。固有振動は本文で論じられた固有値問題であるから，振幅は常にゼロとなる点があり，固有振動でエネルギーや振動が移動することを説明するのが疑問に思われないであろうか。

すなわち，波動関数を用いてエネルギーなどの移動の説明には固有振動とは異なる説明が必要のように考えられる。このようなことを回路理論で考え続けてゆきたいと思っている。

Ⅵ．むすび

流体力学の浴槽問題を一例として，波動回路の過渡応答と定常状態とをハッキリと区別

した。すなわち，浴槽に水を入れたり，排出したりするとき，浴槽の排水口と給水口とを同時に開いたままにしていると，排水量と給水量とが同じになって，浴槽の水量が一定となるところがある。回路理論の言葉を借りると，この一定となっている状態が定常状態であり，一定となるまでの状態が過渡状態である。

波動回路では定常状態となったとき，負荷で電源の最大有能電力を取り出せるのは極く特殊な場合で，その特殊な場合を「共鳴現象」と呼ぶ。

浴槽の排水口を閉じたまま給水すると，浴槽に水がたまる。波動回路に電力がたまるのも極く特殊な場合で，これは固有値問題であり，この場合の電力は電圧と電流との位相が90°ことなる場合で無効電力として電力が閉じ込められる。

［参考文献］

［1］ 木田重雄：いまさら流体力学?，パリティ編集委員会編，丸善，平成6年

［2］ 永井信夫：回路理論の立場から観たマクスウェル方程式の特徴－オリヴァ・ヘヴィサイドの見つけたこと－，北星学園大学経済学部北星論集，43，2，pp.1-17，2004年3月

［2］ 永井信夫：電磁波のヘヴィサイド－永井－空間による解析－量子波動解析の基礎理論－，北星学園大学経済学部北星論集，44，2，pp.41-56，2005年3月

［4］ 永井信夫：ランダムウォークおよび波動の伝搬に対する離散時間解析，北星学園大学経済学部北星論集，44，1，pp.1-13，2005年9月

［5］ 永井信夫：講義シリーズ量子力学と信号処理 第5回　集中定数回路における反射・透過，Journal of Signal Processing（信号処理），Vol.2，No.5，pp.337-346，Sept. 1998

［6］ 永井信夫：講義シリーズ量子力学と信号処理 第3回　定常状態における光の反射・透過，Journal of Signal Processing（信号処理），Vol.2，No.3，pp.194-203，Sept. 1998

［7］ 生井澤寛：キーポイント連続体力学，岩波書店，1995.

［8］ 坂田亮：物性科学，培風館，1989

［Abstract］

Viewing Resonance and Eigenvalue Problems in Wave Circuits Based on an Example of Hydrodynamics

Nobuo NAGAI

This study considers the volume of water in a bathtub with water running simultaneously in from the faucet and out down the drain. The volume of water increases and then becomes fixed when the volume of water running in from the faucet and out down the drain becomes equal. When the drain is closed, water is stored in the bathtub. This paper considers wave resonance and eigenvalue problems of the energy behavior of wave circuits in a bathtub being filled with water.

Key Words: Problem of Water Running in a Bathtub, Transient Response and Steady State, Wave Resonance of Wave Circuits, Eigenvalue Problems of Wave Circuits, Shut up Electric Power and Reactive Power.