ランダムウォークおよび波動の伝搬に対する離散時間解析

永　井　信　夫

目　次

Ⅰ．はじめに

量子力学では粒子の存在確率をシュレディンガー方程式という偏微分方程式から求めている。また，確率過程の最重要現象であるウインナー過程［1］を決定する偏微分方程式は伊藤清によって世界に先駆けて提唱された［1］。これらの偏微分方程式は時間の変数 t と位置の変数 x とをもち，どちらの変数に対しても連続な解を得ている。一方，量子力学では粒子は連続ではなく離散的な存在のために，波動のような連続の存在に対して量子化が必要で，量子力学はこの量子化に成功した学問といわれている。

ところで，複利計算の元利合計は離散的な時間で求められるものであるが，極限としては連続な時間の指数関数が求まる。この場合，離散時間での解と連続な解とでは微妙な違いが生じる。このように連続な解と離散的な解との微妙な違いに特に着目すれば，なにか新しいことが見えてくるかもしれない。本文ではランダムウォークおよび波動の伝搬について，離散的な時間で解析することを試みている。

Ⅱ．複利計算について

お金を借りたり，貸したりしたときの利息や元利合計は年や月や日ごとの複利計算で行われ，離散的な時間での計算で行われる。この計算を連続な時間で行うことにすると，次の関係

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \tag{1}$$

を用いて，イクスポーネンシャルの指数関数を用いることになる。この連続と離散的な時間の違いについて少し考えるために，次の例題1を考えてみよう。

［例題1］　年利率10％の複利計算を考える。

〔解〕この例では，$x=10$ が基準となる。すなわち，

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}\fallingdotseq 2.594 \tag{2}$$

であり，e に近い値となる。すなわち，10年後の元利合計は約2.6倍であるが，連続時間で利息が加わる場合は10年後の元利合計は式(1)を満足し，$e=2.71828$ 倍となる。

キーワード：ランダムウォークと二項定理，離散時間表現，無損失電信方程式と波動関数，波動関数の離散時間表現，進行波と後進波および共鳴現象

ところで，複利計算に関して興味あることが文献［２］の111ページに次のように書かれている。

『これらの公式から「倍増期」すなわちお金の合計が２倍になるのに必要な時間の長さを考えることができ,その値は72ルールと呼ばれるもので計算できることになる。金利を100倍した数字で72を割った答えになるのだ。だからたとえば，８％（0.08）の金利が得られるのならば，お金の合計が元の金額の２倍になるためには72/8で９年,４倍になるためには18年，８倍になるためには27年かかることになる。もしも運良く14%の年リターンが得られるのなら，５年ちょっと(72/14は５を若干上回るので）で２倍，10年ちょっとで４倍になる。連続複利の場合，72の代わりに70を使う。』

倍増期の計算を例題１の連続時間での元利合計に応用すると，７年後には

$$\exp(0.7) = 2.013753 \tag{3}$$

となり，確かに２倍強となる。

連続時間での元利合計ではイクスポーネンシャルの指数関数に置き換える操作のみで全てが理解される。

ここで，離散時間での取り扱いに移る。

年利率10%の複利計算での倍増期は7.2年後となり，少し半端な年数となるので，その倍になる４倍を考え，15年経過したときを考えれば，次のように求まる。

$$(1+0.1)^{15} \fallingdotseq 4.177248 \tag{4}$$

上の式から確かに４倍を超えていることが分かる。ところで，上式を展開すると，次のように表される。

$$(1+0.1)^{15} = 1 + 15\times 0.1 + 105\times 0.1^2 + 455\times 0.1^3 + 1365\times 0.1^4 + \cdots \tag{5}$$

上式の５項までを計算すると4.1415となり，式(4)の値の99%以上になる。したがって，式(5)の項数は16項求まるが，確率統計の計算としては数値計算の項数は1/3で十分と考えられる。

上に示したように，離散的な計算の場合は項数をどのくらい計算すればよいかが分かり，それが確率論の大数の法則と関係するかもしれないので，年利率10%の複利計算の年数のより多いものを考えてみよう。

倍増期の計算から，7.2の５倍が36なので，1.1の36乗を求めると30.91268となり，２の５乗の32にならないので，1.1の37乗を求めると34.00395となり，32を超えるので，(1+0.1）の37乗の計算を行う。

その結果，0.1の８乗の第９項までの計算で,33.83388が求まり,全体の99%を超える。したがって，求める項数は1/4で十分と考えられる。なお，この場合のピーク値は0.1の３乗とその係数との積である7.77である。

このように,複利計算を離散的に求めると,連続的なものとは異なる有益な情報を得ることができると考えられるので，次章で離散的な計算をランダムウォークに適用してみよう。

Ⅲ．二項定理とランダムウォーク

文献［１］による泥酔した酔っぱらい氏の移動問題は，次のように表すことができる。「泥酔した酔っぱらい氏が左右に延びた小路を等確率で左右に向きながら，１歩調の歩幅を h として移動している。この場合，M 歩での移動距離が mh を実現する確率を求める」ことが数学として重要な問題となる。ここで，自然数 M に対して

$$|m| << M \tag{6}$$

となるような正および負の整数となる m が実現される確率は２項分布の確率 $W(m, M)$ を用いて，次のように表される。

$$W(m,M) = \left(\frac{1}{2}\right)^M \frac{M!}{\left(\frac{M+m}{2}\right)!\left(\frac{M-m}{2}\right)!} \tag{7}$$

上式において，M が大きい数の場合は，スターリングの公式などを用いて，次のように求められる。

$$W(m,M) \approx \frac{1}{\sqrt{M}} e^{\frac{m^2}{2M}} \qquad (8)$$

上に求めた分布は離散的な分布の場合であるが，確率過程では連続的な分布を求めることとなり，正規確率変数が次のように定義される［1］。

〔定義1〕（正規確率変数）

任意の実数の値 $-\infty < r < \infty$ を実現する確率法則が次の正規分布で与えられる。

$$N(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(r-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (9)$$

ここで，平均 μ，標準偏差 σ，分散 σ^2 と呼ぶ。

上の正規確率変数には離散的な場合の重要な歩数である M は含まれていない。すなわち，連続的な表現では M を∞にしたものである。

信号処理などの工学の分野では経過した時間が重要である。すなわち，1歩調歩むのに必要な時間がわかっていれば，その M 倍の時間が経過したときの分布が必要になる。そのため，M 歩を基準とする式(7)の離散的取り扱いについて考察を進めよう。

文献［3］に仮説検定のために，サイコロ実験の例題がある。ここでは，それを参考にして次の例題を考えよう。

〔例題2〕 成功率1/2の試行を100回おこなったときの分布などを求めよ。

〔解〕 期待値は50回であり，分散は25となるから，標準偏差は5と求まる。確率の分布では，期待値を中心に標準偏差の3倍の範囲内に99%以上の分布が得られることが知られている。そこで，成功数の確率分布を調べて，成功数が35回から65回になる確率は99%以上になることが確かめられる。

この例題から，成功率1/2の試行を M 回行ったときの期待値は $M/2$ であり，分散は $M/4$ となることが確かめられる。

この例題に基づいて，ランダムウォークについて考えてみよう。この例題においては，不成功の場合には元の成功数のところに留まっているのに対して，ランダムウォークの場合には，左右どちらかに移動しなければならないところが異なっている。すなわち，ランダムウォークでは1回歩めば元の場所に留まることができないので，元の場所に戻るためには偶数歩歩まなければならない。その結果が式(7)に反映されていて，式(7)における m の値は

$$|m| \leq M \qquad (10a)$$

なる範囲内で正負の数とすることができるが，

M が偶数なら m も偶数 (10b)

M が奇数なら m も奇数 (10c)

である。

また，ランダムウォークでは左右どちらかに移動しなければならないために，期待値は0となり，いつまでも元いた場所に居る確率が最も大きくなる。なお，分布の大きさの目安を与える標準偏差は例題に比べてランダムウォークでは2倍になる。したがって，式(7)のランダムウォークの標準偏差は $\sqrt{M}$ となり，分散と歩いた歩数とが等しくなる。

以上の考察から，離散時間 M を含んだ分布を表す式を求めておこう。離散時間の表現は信号処理に用いられるz変換が適していると考えられるので，z変換を用いることを考える。すなわち，単位の遅れ素子を z^{-1} で表したいのだが，ランダムウォークでは偶数と奇数とを区別しておいた方がよさそうである。そこで，1歩調の遅れ素子を ξ^{-1} と表す。また，左右に移動する記号として，右に移動することを r で表し，左に移動することを r^{-1} と表すことにする。そうすれば，M 歩移動したときの2項分布を表す式は次のようになる。

$$\left\{\frac{1}{2}(r^{-1}+r)\xi^{-1}\right\}^M \quad (11)$$

このように表しておけば，式(7)の２項分布の確率 $W(m,M)$ は，式(11)の $r^m\xi^{-M}$ の係数となっている。なお，M が奇数のときは，m も奇数となるため，$m=0$ の分布が求まらない。そこで，m が偶数になる基準の２を重要視し，それを遅れ素子の基準として次のように表す。

$$\xi^{-2}=z^{-1}=\exp(-sT) \quad (12a)$$

すなわち，

$$\xi^{-1}=z^{-1/2}=\exp\left(-\frac{sT}{2}\right) \quad (12b)$$

上の表現は z 変換であり，その説明は後でする。この z 変換を用いて２項分布の確率 $W(m,M)$ の表現を改めて考えてみよう。

M が偶数のときは m も偶数となるから，次のように表そう。

$$M=2N \quad (13a)$$

$$m=2n \quad (13b)$$

$$|n|<N \quad (13c)$$

上の表現を用いると，式(11)は

$$\left\{\frac{1}{4}(r^{-2}+2r^0+r^2)z^{-1}\right\}^N \quad (14)$$

と表され，２項分布の確率 $W(m,M)$ の表現は次のように改められる。

$$W(2n,2N)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2N}\frac{(2N)!}{(N+n)!(N-n)!} \quad (15)$$

この $W(2n,2N)$ は，式(14)の $r^{2n}z^{-N}$ の係数となっている。

以上の考察を基に，式(8)と式(9)とを比べてみよう。式(8)は離散的な表現であり，式(9)は連続的な表現であるから，イクスポーネンシル部分以外の係数は異なっていても当然である。しかし，イクスポーネンシル部分は対応しているはずである。すなわち，ランダムウォークの期待値は０であるから，式(9)における期待値 μ に対して，$\mu=0$ とすれば，分散

$$\sigma^2=M \quad (16)$$

とすればよいことがわかる。すなわち，式(8)における分散は M であり，式(8)と(9)との対応がつけられている。

Ⅳ．左右不等確率のランダムウォーク

式(9)においては期待値 μ をゼロではない数にもできる。ランダムウォークで期待値 μ をゼロではなくするには，左右に歩む確率を等確率ではなくすればよい。その場合を考えるために，文献［３］の第３章の問題を取り上げる。

〔例題３〕　成功確率が 1/6 の試行を 216 回行う実験の確率分布を求めよう。

〔解〕　期待値は 36 回であり，分散は 30 となるから，標準偏差はおよそ 5.5 と求まる。確率の分布では，期待値を中心に標準偏差の３倍の範囲内に 99％以上の分布が得られることが知られている。そこで，成功数の確率分布を調べて，成功数が 20 回から 52 回になる確率は 99％以上になることが確かめられる。

この例題から，成功率 p で，

$$p+q=1 \quad (17a)$$

上式の p および q は０と１との任意の数でかまわないが，ここでは成功率の方が小さい数としておく。すなわち，

$$1>q>p>0 \quad (17b)$$

なお，試行を M 回行ったときの期待値は，

$$pM \quad (17c)$$

であり，分散は，

$$pqM \quad (17d)$$

となることが確かめられる。したがって，標準偏差は，

$$\sqrt{pqM} \quad (17e)$$

が得られることも確かめられた。

ここで，例題１を振り返って考えてみよう。例題１は成功率 $p=1/11$ の問題となる。数値例では試行数 $M=37$ であるから，その期待

値は $pM=3.36$，分散は $pqM=3$ であるから，標準偏差は約 1.7 したがって，標準偏差の 3 倍は $3\times1.7=5.1$ となるので，確かに成功数が 0 回から 8 回の間に 99%以上の確率分布を得ることができ，例題 1 の数値例が説明できる。

以上の考察に基づいて，左右に移動する確率が等しくない場合のランダムウォークについて考えてみよう。この例題においても例題 2 と同様に，不成功の場合には元の成功数のところに留まっているのに対して，ランダムウォークの場合には，左右どちらかに移動しなければならないところが異なっている。すなわち，ランダムウォークでは 1 回歩めば元の場所に留まることができないので，元の場所に戻るためには偶数歩歩まなければならないことなどを考慮に入れて，次の例題を考えよう。

〔例題 4〕 成功確率 p で右に移動するランダムウォークの分布を求めてみよう。

〔解〕 左右に等確率で M 歩移動するランダムウォークの分布は 2 項分布で求められ，式(11)で与えられるから，この例題に対しては，右に移動する項には pr とし，左に移動する項には qr^{-1} とすればよい。その結果，M 歩移動したときの 2 項分布を表す式は次のように表される。

$$\left\{\left(qr^{-1}+pr\right)\xi^{-1}\right\}^{M} \tag{18}$$

上式を用いて，M 歩移動したとき，

$$|m|\leqq M \tag{19a}$$

となる正および負の整数となる m が実現される確率 $W_u(m,M)$ を求めよう。それは式(18)の $r^m\xi^{-M}$ の係数となり，次のように表される。

$$W_u(m,M)=\frac{M!}{\left(\dfrac{M-m}{2}\right)!\left(\dfrac{M+m}{2}\right)!}q^{\frac{M-m}{2}}p^{\frac{M+m}{2}} \tag{19b}$$

この分布の期待値は元の位置 0 から移動し，その移動の値は式(17)を参考にすれば得られ，次の期待値が得られる。

$$-M+2pM \tag{20a}$$

また，標準偏差は式(17)を用いて，次のように求まる。

$$2\sqrt{pqM}=\sqrt{4pqM} \tag{20b}$$

この左右不等確率のランダムウォークの分布は期待値を中心とした対称形とはなっていないことに注意しよう。

ところで，式（19b）は離散的な表現であるのに対して，式(9)は連続的な表現である。この連続的な表現において，期待値 μ を元の位置の 0 とは異なる値にできるけれども，そのときは期待値を中心として対称の形となっている。すなわち，期待値が元の位置から移動する場合には，分布は非対称形になる方が現実的と考えられるので，離散的な表現が適しているように考えられないであろうか。

なお，左右不等確率のランダムウォークの場合も M および m が偶数の分布を考えておくと良い。そこで，式(13)の場合を式（19b）に代入して，次の確率が得られる。

$$W_u(2n,2N)=\frac{(2N)!}{(N+n)!(N-n)!}q^{(N-n)}p^{(N+n)} \tag{21}$$

本文では離散的表現による時間遅れ素子 z^{-1} あるいは ξ^{-1} の役割を考察するのが主目的のため，ランダムウォークなどの確率現象の考察はここで終わりにし，次に波動の移動について考えよう。

V．波動関数の離散時間表現

ランダムウォークは確率微分方程式で表現されるため，連続時間で表される関数のように考えられるが，経過時間に関しての表現については，特に左右不等確率の場合，離散時間表現の方が現実の現象を良く表すように考えられることを前章で示した。

本章では波動関数を考えるが，波動関数は

マクスウェル方程式という偏微分方程式から導かれるので，連続時間での表現が適していて，積分での表現がよいように考えられている。しかしながら，共鳴現象などを積分で表現すると，実は異なる時刻の現象を同時刻の現象とみて同じ積分で表される場合がある。そこで，本章では波動関数の共鳴現象を離散時間で表現し，共鳴現象がコヒーレンス性と深く関係していることを示す。

なお，波動関数の表現は文献［４］と重複するところが多いことをあらかじめ断って置く。

5.1　波動関数のｚ変換法による表現

マクスウェル方程式がもつ信号の移動に関する重要な性質から考えよう。マクスウェル方程式はそれと同等な無損失の電信方程式で表され，次のように表される。

$$-\frac{\partial}{\partial x}v(x,t)=L\frac{\partial}{\partial t}i(x,t) \tag{22a}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}i(x,t)=C\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) \tag{22b}$$

入力源から媒体に信号あるいは波動が入力されると，直ちに微分方程式の境界条件を満たす状態（回路理論では定常状態と呼ぶ）になるわけではなく，過渡状態（別の言い方をすると非定常状態）になる。この過渡状態を表現するにはラプラス変換が用いられる。そこで，式(22)にラプラス変換を行うと，次の空間１次元の微分方程式に書き換えられる。

$$-\frac{d}{dx}V(x)=sLI(x) \tag{23a}$$

$$-\frac{d}{dx}I(x)=sCV(x) \tag{23b}$$

上の式から，$V(x)$ も $I(x)$ も次の波動方程式を満たす。

$$\frac{d^2}{dx^2}V(x)=s^2LCV(x) \tag{24a}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}I(x)=s^2LCI(x) \tag{24b}$$

上式に対しては，伝搬定数 γ が次のように求まる。

$$\gamma=s\sqrt{LC}=su^{-1} \tag{25}$$

ここに，u は信号の伝搬速度を表す。

式(25)を用い，積分定数 K_a および K_b を用いると，式(24)は次のように表される。

$$V(x)=K_a\exp(-su^{-1}x)+K_b\exp(su^{-1}x) \tag{26a}$$

$$I(x)=\frac{K_a}{R_0}\exp(-su^{-1}x)-\frac{K_b}{R_0}\exp(su^{-1}x) \tag{26b}$$

ここに，$R_0=\sqrt{\frac{L}{C}}$ と表され，特性インピーダンスと呼ばれる。

ところで，u は式(25)に示されているように伝搬速度を表す。前章まで考えたランダムウォークは偏微分方程式を解いて得られた解ではないので，伝搬速度は得られないことに注意しておこう。さて，u は式(25)に示されているように伝搬速度を表すから，xu^{-1} は距離 x を波動が進むのに必要な時間を表すので，それを τ と表す。したがって，式(26)には $\exp(-s\tau)$ および $\exp(s\tau)$ が現れていて，それはラプラス変換では信号が時間 τ 遅れたり，進んでいたりすることを表す。そのため，右に移動する進行波および左に移動する後進波を定義することができ，波動は左右に拡がった現象ではなく，移動することが表現される。そのことを式（26a）を用いて表そう。

式（26a）において，$x=0$ とおくと

$$V(0)=K_a+K_b=V^+(0)+V^-(0) \tag{27a}$$

ここに，V^+ は右に進む進行波を，V^- は左に進む後進波を表す。

式（27a）は位置 $x=0$ における電圧波は右に進む進行波 V^+ と左に進む後進波 V^- との２つの波が共存していることを表す。式(27a)をラプラス逆変換を行うと，次のように表される。

$$v(0,t)=v^{+}(0,t)+v^{-}(0,t) \tag{27b}$$

ここで，注意すべきことは，$v^{+}(0,t)$ および $v^{-}(0,t)$ はそれぞれ進行波および後進波であり，位置 $x=0$ に同時刻に現れると仮定される。

次に位置 x における電圧波を考えると，式(26a) は次のように表される。

$$V(x)=V^{+}(x)\exp(-s\tau) + V^{-}(x)\exp(s\tau) \tag{28a}$$

したがって，式（27b）を用いて式（28a）を逆ラプラス変換すると次式を得る。

$$v(x,t)=v^{+}(x,t-\tau)+v^{-}(x,t+\tau) \tag{28b}$$

このように，位置 x における電圧波は時間 τ 遅れる進行波と時間 τ だけ先に現れている後進波とがあり，位置 x に現れる進行波と後進波とは現れる時間に 2τ という時間差があることに注意しよう。

一方，ランダムウォークにおいては，ある時刻における分布を表していて，ある位置 x の分布はただひとつの値だけで，２つの時間の異なる振幅や分布の値が共存することはない。

電流波も同様に，次のように表される。

$$i(x,t)=i^{+}(x,t-\tau)+i^{-}(x,t+\tau) \tag{29}$$

ここで，

$$v^{+}(x,t-\tau)=R_0 i^{+}(x,t-\tau) \tag{30a}$$

$$v^{-}(x,t+\tau)=R_0 i^{-}(x,t+\tau) \tag{30b}$$

したがって，位置 x における電流波も時間 τ 遅れる進行波と時間 τ だけ先に現れている後進波とがある。

このように，マクスウェル方程式および無損失電信方程式をラプラス変換を用いて解くと，進行波と後進波とで表されるために，波動が移動していることが表されている。それに対してランダムウォークはある時刻における確率分布を与えるだけで，移動の様子は表されていない。

また，物理学では波動は三角関数を用いて，

$$\sin(\beta x-\omega t) \text{ および } \sin(\beta x+\omega t) \tag{31}$$

と表されるために，波動の移動が表されることがなく，ひろがった現象のように考えられているが，本文で表したように指数関数による複素数の表現を用いると，波動は時間とともに移動している様子が表されている。

このように指数関数の複素数で表現すると，左に移動する後進波の方が右に移動する進行波よりも時間的に先に現れている。この時間的に先に現れる現象は積分を用いる量子論にも表されることになる。このため，量子論では文献［５］などに述べてあるような「パイロット波」のような着想が考えられている。

次節以降では，異なる時間での表現がよく表される離散的な時間表現で波動を表すことを試みて，パイロット波の考えについてのヘヴィサイド－永井－空間による回路理論的な考察を試みよう。

5.2　波動回路の複素周波数パラメータ

等長分布定数回路［６］においては，式(25)の伝搬定数 γ を用いて長さ l を固定した次の式を複素周波数パラメータとして用いる。

$$\tanh\gamma l \tag{32}$$

上の複素周波数パラメータを双１次変換すると次式が得られる。

$$\tanh\gamma l=\frac{1-\exp(-\gamma 2l)}{1+\exp(-\gamma 2l)} \tag{33}$$

上式の $\exp(-\gamma 2l)$ は次のように表すことができる。

$$\exp(-\gamma 2l)=\exp(-su^{-1}2l) =\exp(-sT) \tag{34}$$

上式の $\exp(-sT)$ は逆ラプラス変換すると信号が時間 T 遅れることを表す。そこで，信号処理ではそれを「遅れ素子」と呼び，信号の過渡的な伝わり方を表す $\exp(-sT)$ を複素周波数パラメータのように用いる。この解析手法を z 変換法という。すなわち，ヘヴィサイド－永井－空間では複素周波数パラメータとしては，遅延を表す

$$\exp(-sT) \tag{35}$$

を用いるのが基本である。

5.3　波動の多重反射

式(26)を満足する線路を伝送回路として用いたときの回路解析は文献［7］で行われているので，文献［7］を参照し，図1に示す回路の時間的な解析を考えよう。

図1に示す回路で過渡解析を主とした解析をするために，ラプラス変換された式を用いることにする。

図1に示すように，長さ l の無損失均一線路にラプラス変換された励振電圧 $E(s)$，内部抵抗 R_G の電圧源と，抵抗 R_R を負荷として用いる回路を解析しよう。線路上の電圧および電流は終端条件にかかわらず式(26)で与えられ，K_a および K_b が終端条件で決定される。その終端条件は，電源端の $x=0$ および負荷端の $x=l$ であり，次のように与えられる。

$$E(s)=V(0,s)+R_G I(0,s) \tag{36a}$$

$$V(l,s)=R_R I(l,s) \tag{36b}$$

ここに，$x=0$ と $x=l$ における電圧および電流は次のように表される。

$$V(0,s)=K_a(s)+K_b(s) \tag{37a}$$

$$I(0,s)=\frac{K_a(s)}{R_0}-\frac{K_b(s)}{R_0} \tag{37b}$$

$$V(l,s)=K_a(s)\exp(-su^{-1}l)+K_b(s)\exp(su^{-1}l) \tag{37c}$$

$$I(l,s)=\frac{K_a(s)}{R_0}\exp(-su^{-1}l)-\frac{K_b(s)}{R_0}\exp(su^{-1}l) \tag{37d}$$

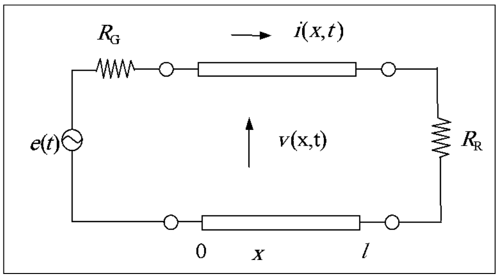

図1　無損失均一分布定数線路を回路素子として用いた回路

Fig.1　A circuit using a uniform lossless distributed constant line

式(37)を式(36)に代入して，$K_a(s)$ および $K_b(s)$ を求めると次のようになる。

$$K_a(s)=t_G\frac{E(s)}{2}\frac{1}{1-r_R r_G\exp(-su^{-1}2l)} \tag{38a}$$

$$K_b(s)=t_G\frac{E(s)}{2}\frac{r_R\exp(-su^{-1}2l)}{1-r_R r_G\exp(-su^{-1}2l)} \tag{38b}$$

ここに，$E(s)/2$ は電圧源の電圧の1/2であるから入力電圧を示し，t_G は電圧源から線路への電圧透過係数で

$$t_G=\frac{2R_0}{R_0+R_G} \tag{39a}$$

と表される。また，r_R および r_G はそれぞれ線路から負荷，および線路から電圧源に向かって進行する波の反射係数を表していて，次のように表される。

$$r_R=\frac{R_R-R_0}{R_R+R_0} \tag{39b}$$

$$r_G=\frac{R_G-R_0}{R_G+R_0} \tag{39c}$$

式(38)の $K_a(s)$ および $K_b(s)$ はz変換で表されている式のようになっている。そこで，式(26a)の $V(x)$ がz変換で表されるかどうかを検討しよう。

まず，電圧源から線路への入力電圧を $E_t(s)$ と表すことにすれば，式(38)から次のようになる。

$$E_t(s)=t_G\frac{E(s)}{2} \tag{40}$$

右に進行する $K_a(s)$ に関係する式および左に進行する $K_b(s)$ に関係する式は，式(27)，(28)，(38)を用いて次のように表される。

$$K_a(s)\exp(-su^{-1}x)=\frac{E_t(s)\exp(-su^{-1}x)}{1-r_R r_G\exp(-su^{-1}2l)} \tag{41a}$$

$$K_b(s)\exp(su^{-1}x)$$

$$=\frac{E_t(s)\,r_R\exp(-su^{-1}(2l-x))}{1-r_Rr_G\exp(-su^{-1}2l)} \quad (41b)$$

ところで，u は波の伝搬速度を表しているので，$u^{-1}2l$ は距離 $2l$ を進むために必要とする時間を表すから，次のように表す。

$$T=\frac{2l}{u} \quad (42a)$$

また，$u^{-1}x$ は距離 x を進むために必要とする時間を表すから，次のように表す。

$$\tau=\frac{x}{u} \quad (42b)$$

ここで z 変換を用いるために，次のように定義する。

$$r_Rr_G=a \quad (43a)$$

$$\exp(-su^{-1}2l)=\exp(-sT)=z^{-1} \quad (43b)$$

式 (43a) は電圧の波の負荷端および電源端での反射係数の積であるから，電圧の波が線路を 1 往復したときの電圧の減少の割合を示す。また，式 (43b) は電圧の波が線路を 1 往復したときの遅れ時間が T であることを表している。

上の定義を用いれば，式(41)は次のように z 変換で表される。

$$K_a(s)\exp(-su^{-1}x)=\frac{E_t(s)\exp(-s\tau)}{1-az^{-1}} \quad (44a)$$

$$K_b(s)\exp(su^{-1}x)=\frac{E_t(s)\,r_R\exp(-s(T-\tau))}{1-az^{-1}} \quad (44b)$$

ところで，$E_t(s)$ のラプラス逆変換を $e_t(t)$ とする。すなわち，

$$\mathsf{L}^{-1}[E_t(s)]=e_t(t) \quad (45a)$$

上の定義を用いれば，$E_t(s)\exp(-s\tau)$ のラプラス逆変換は次のようになる。

$$\mathsf{L}^{-1}[E_t(s)\exp(-s\tau)]=e_t(t-\tau) \quad (45b)$$

したがって，$\exp(-s\tau)$ は電圧波形の時間 τ の遅れを表す。

式 (44a) を級数で表すために，z^{-1} の多項式で表し，その多項式にラプラス逆変換を行えば，次のように時間 T ごとに現れる波形を表し［8］，サンプリングと同じ効果を表している。

$$\begin{aligned}&\mathsf{L}^{-1}[K_a(s)\exp(-s\tau)]\\&=e_t(t-\tau)+ae_t(t-\tau-T)\\&\quad+a^2e_t(t-\tau-2T)+\\&\quad\cdots+a^ne_t(t-\tau-nT)+\cdots\end{aligned} \quad (46)$$

式(46)は，線路に入射された電圧の波は時間 τ の遅れで線路上の点 x に到達し，次の電圧の波は線路を 1 往復して時間 T の遅れと反射係数による振幅の減少をして点 x に到達し，次々に往復するたびに時間の遅れと振幅の減少をして点 x に到達することを表している。

式(46)の意味は上の通りであるが，我々が波動を観測しているのは同時刻のことなので，多重反射の波動を同時刻に観測するためにはどのようになっているのであろうか。

例えば，

$T=10$ 秒，$\tau=2$ 秒， 2 時 10 分 02 秒

に観測しているとする。

この場合，$e_t(t-\tau)$ の波は電源を 2 時 10 分丁度に離れた波であり，$ae_t(t-\tau-T)$ の波は電源を 2 時 9 分 50 秒に離れた波であり，…となり，10 秒ごとに電源を離れた波の重なり合いになっている。そのため，共鳴を得るためにはコヒーレンス性が重要となることが理解されよう。

同様にして，電圧の後進波 $K_b(s)$ の多重反射の様子も求められる。なお，後進波の場合は最初の波は $T-\tau$ 秒遅れて現れるために例題では 8 秒遅れとなる。その結果，2 時 10 分 02 秒に観測している場合には，最初の波は電源を 2 時 9 分 54 秒に離れた波であり，その前の波は 2 時 9 分 44 秒に離れた波であり，……となり，この場合も 10 秒ごとに電源を離れる波の重なり合いになっていて，共鳴を得るた

めにはコヒーレンス性が重要となる。また，電流の進行波および後進波の多重反射の様子も同様に求められる。

Ⅵ．波動回路の共鳴現象

6.1　回路素子の値の仮定

図1に示す回路において，

$$R_R = R_G = 1 \tag{47a}$$

$$\exp(-sT) = \exp(-j2\pi) = 1 \tag{47b}$$

のときは，特性インピーダンス R_0 が任意の値に対して共鳴する。ところで，文献［4］において，共鳴トンネルダイオードについて述べているが，それは $R_0=11$ に相当していた。ここでは，もう少しキッチリとした値となる

$$R_0 = 10 \tag{48}$$

の場合について考えておこう。

この電圧源の最大有能電力は

$$E^2/4 \tag{49a}$$

であるから，

$$E = 2 \tag{49b}$$

として，最大有能電力を1Wとしておく。

6.2　定常状態の進行波と後進波の役割

定常状態になったときの，進行波 $K_a(s)$ および後進波 $K_b(s)$ は次のようになる。

$$K_a(s) = \frac{1+R_0}{2} = 5.5 \tag{50a}$$

$$K_b(s) = \frac{1-R_0}{2} = -4.5 \tag{50b}$$

この場合の電圧定在波の最大値 $V_{\max}$ は $K_a(s)$ と $K_b(s)$ との位相が合ったときで，絶対値を合わせた値となり，次のようになることに注意しておく。

$$V_{\max} = |K_a(s)| + |K_b(s)| = R_0 = 10 \tag{50c}$$

したがって，定常状態での負荷の電圧は $K_a(s)$ に線路から負荷への電圧透過係数

$$t_r = \frac{2R_R}{R_0+R_R} = \frac{2}{11} \tag{51}$$

を掛けて1となり，最大有能電力が負荷に供給されている。また，定常状態になるまでには，角周波数 ω のコヒーレントな波が必要となり，コヒーレント長の求め方は文献［4］に示してある。この例題のコヒーレント長を求めると，

95%の5.2以上になるには　　8回

99%の5.4以上になるには　　12回

の多重反射が必要になる。

この多重反射の回数は離散時間の手法を用いて過渡応答を求めると簡単に求められるが，積分を用いると簡単に求められるわけではない。したがって，多重反射の回数などの過渡現象を求めるには，連続時間の解を求める積分は用いないで，離散時間での解を用いるべきである。

ところで，波動回路の共鳴現象の特長は過渡現象にあることのひとつの例題を考えておこう。上の例題では電圧源の電圧E=2を考えているが，その状態で定常状態となって，負荷の1Ωの抵抗に1Wの有効電力が供給されているときに，E=4になった場合，直ちに負荷に電圧2V，電流2Aの有効電力4Wが供給されるであろうか。

この問題を考えるときはE=2のとき，定常状態で共鳴となっている（すなわち，電圧源のポートにおいて反射が0になっている）ことを過渡現象的に示さなければならない。そこで，線路上を左右に移動している進行波と後進波との役割から考えてみよう。

進行波の電圧の振幅が5.5であり，線路から負荷への電圧透過係数が式(51)で与えられるので，負荷に有効電力の1Wが得られることは少し前に示した。また，進行波の電圧の振幅が5.5であり，負荷ポートでの反射係数 r_R が式 (39b) に与えられているので，後進波の電圧が−4.5になることが示される。

電源のポートにおいて反射がゼロになるこ

とを示そう。電圧源の入力電圧は1Vであり，そこにおける反射係数は式(39b)の r_R の符号を逆にしたものであるから $-r_R$ であり，2つの積は9/11である。一方，後進波の電源の内部抵抗 R_G への電圧透過係数 t_{0G} は

$$t_{0G}=\frac{2R_G}{R_0+R_G}=\frac{2}{11} \tag{52}$$

であり，電源の内部抵抗 R_G への電圧は−9/11となる。したがって，2つの電圧を合わせるとゼロとなり，電源の内部抵抗 R_G への反射はないことになり，入射電圧の1Vはすべて線路に入射される。

なお，後進波の反射波と電源からの入射波の線路への透過波とが合わさって5.5Vとなり，それが進行波の電圧である。

6.3　定常状態から電源の電圧に変化がある場合

ここで，負荷の1Ωの抵抗に1Wの有効電力が供給されているときに，E＝4になった場合，直ちに負荷に電圧2V，電流2Aの有効電力4Wが供給されるがどうかを考えよう。

この場合，後進波の電源の内部抵抗 R_G への電圧透過は−9/11Vで定常状態の値であるが，電源電圧の反射波の振幅は18/11Vとなるため，反射電圧が9/11Vとなり，反射が生じることになる。

電源ポートに反射が生じるために，進行波の電圧は161/22Vとなり，負荷の1Ωへの電圧は162/121Vが給電されることになり，2Vの有効電力が供給されるわけではない。

この場合，E＝4になって以降それが続くなら，数回の多重反射の後，有効電力4Wの定常状態となる。

このように考えると，電源のスイッチを切ったとき，直ちに負荷の電圧がゼロになるわけではないことが理解されよう。この場合の回路のON−OFFはスレッシュホルドの設定で変わるが，とにかくON−OFF時間が必要なことが理解されよう。

量子論において，共鳴トンネルダイオードは共鳴現象を利用して超高速のスイッチの実現を考えているが，共鳴を用いる場合のスイッチは，とにかくON−OFF時間が必要となることが理解できよう。

Ⅶ．むすび

著者は文献［9］などに述べたように，波動は三角関数を用いて積分で表現すると定常状態の解析しか行えないので，例えば，津波のような過渡現象（非定常現象）が重要な波動の解析も行える解析法を用いるべきであると考えている。

本文では，まずランダムウォークを考えた。ランダムウォークは伊藤の確率偏微分方程式で提案されたため，確率測度空間で取り扱われ，連続時間で表される。しかし，ランダムウォークの初期の定義は離散時間で行われるため，極めて初歩的に離散時間で解析を行ってみた。その結果，経過時間を考慮に入れた解析では離散時間の取り扱いに利点もあることが示された。

次に波動関数の離散時間的な解析を行った。すなわち，無損失電信方程式は偏微分方程式で与えられるため，時間の変数 t についての解は連続となるが，過渡応答がよく表されるようにラプラス変換を用いた。そのとき，位置の変数 x における解は2つ求まり，それらは時間との関係から右に移動する進行波と左に移動する後進波となることが示された。これらの波を離散時間的に取り扱った結果，共鳴現象などの波動の振る舞いにはコヒーレンス性を示す信号が必要となることが示された。

ところで，量子力学に用いられるシュレディンガー方程式の解は粒子の存在確率であると考えられているが，シュレディンガー方程式の位置の変数の解も2つ求められ，それらは時間の変数との関係から左右に移動する

進行波と後進波とするのが妥当と考えられるため，ランダムウォークのような確率の現象ではないと考えることができるように思う。そのため，今後，シュレディンガー方程式の解を文献［4］で述べたヘヴィサイド－永井－空間で求めたいと考えている。

［参考文献］

［1］　保江邦夫：確率微分方程式 ── 入門前夜 ──，朝倉書店，1999
［2］　ジョン･アレン･パウロス（望月衛，林康史訳）：天才数学者，株にハマる，ダイヤモンド社，2004
［3］　石川幹人：サイコロとExcelで体感する統計解析，共立出版，1997
［4］　永井信夫：電磁波のヘヴィサイド－永井－空間による解析 ── 量子波動解析の基礎理論 ──，北星学園大学経済学部北星論集，44，2，pp.1-17，2005年3月
［5］　ジョン・L・カスティ（寺嶋英志訳）：プリンストン　高等研究所物語，p.187，青土社，2004年
［6］　A. Matsumoto (ed.): Microwave Filters and Circuits, Academic Press, 1970
［7］　永井信夫：講義シリーズ量子力学と信号処理　第8回無損失分布定数線路の過渡応答，Journal of Signal Processing（信号処理），Vol.3，No.3，pp.173-182，May 1999
［8］　武部幹：回路の応答，（p.141）　コロナ社，1981
［9］　永井信夫：回路理論の立場から観たマクスウェル方程式の特徴 ── オリヴァ・ヘヴィサイドの見つけたこと ──，北星学園大学経済学部北星論集，43，2，pp.1-17，2004年3月

［Abstract］

Discrete Time Analysis for Random Walk and Wave Propagation

Nobuo NAGAI

The simplest definition of random walk is given by discrete time and probability distribution, and presented by the binomial theorem. That is, the distribution of random walk is presented by a term for a position x. In electromagnetic theory, electric and magnetic fields satisfy the same wave equation derived from Maxwell equations, which are composed of simultaneous differential equations of electric and magnetic fields. The solutions for the wave equation are expressed by two moving waves, i.e. forward wave and backward wave, and the two waves appear at different times for a position x, so wave propagation can be presented by discrete time representation. As a result, the forward and backward waves are presented by different geometrical progressions respectively. This means that a coherent wave for the resonance occurring in wave function is required.

Key words: Random Walk and Binomial Theorem, Discrete Time Presentation, Lossless Telegraphers' Equations and Wave Equation, Discrete Time Presentation for Wave Function, Forward and Backward Waves and Resonant Phenomena