マクスウェル方程式に基づく波動方程式の一般化
― 回路理論的考察 ―

永 井 信 夫

目 次

Ⅰ．はじめに

携帯電話の急速な普及によって，通信媒体としての波動であるマイクロ波および光の利用が重要となっている。一方，その波動を制御する回路の視点から見ると，集積化技術の進歩も著しく，ナノテクノロジーの一つの中心課題ともなり，量子力学的考察も必要となっている。したがって，マイクロ波や光などの波動を数式で表す波動方程式を基本から再考し，量子力学などにも通用する理論的観点での性質を明らかにしておく必要があると考えられる。

また，波動方程式は通信工学などの工学での利用ばかりではなく，金融工学など社会科学や人文科学でも利用されていて，極めて広い分野に利用されると考えられる。

ところで，従来物理学では波動方程式は一つの関数で与えられる偏微分方程式として表され，ヒルベルト空間の関数として解析されることが多い。それに対して，マイクロ波などの通信工学で用いられる波動方程式は，マクスウェル方程式から導かれる方程式と見なされる。すなわち，マクスウェル方程式は電界と磁界という二つの関数が共に同じ波動方程式を満足する。このように二つの関数が満足する場合は，電気における電圧と電流とを組とした理論である回路理論が利用できる。

そこで，本文では波動方程式をその原点であるマクスウェル方程式から導かれたものとして，従来行われている物理学的観点からではなく，通信工学などの工学一般で用いられる回路理論の観点から吟味し，マクスウェル方程式および波動関数の基本性質をまず求める。次に，マクスウェル方程式を拡張するにあたり，回路理論においては特に重要な無損失性を保持した一般化を考察する。

Ⅱ．波動方程式の解法

波動方程式の原点はマクスウェル方程式であり，電界および磁界という二つの関数で現されるマクスウェル方程式から，電界あるいは磁界のみの関数で表される波動方程式が得られる。一方，物理学においては，２階の偏微分を含む偏微分方程式を波動方程式と呼んでいる。その種の方程式の中には，量子力学で用いられるシュレディンガー方程式も含まれ，シュレディンガー方程式も波動方程式の一種類である。そのため，物理学では力学に力点を置いているので，波動方程式を満足する関数は唯一つとして解いている。この章ではその解法を述べる。

波動方程式は空間的に３次元のものを言うが，ここでは最も簡単であり，波動方程式の基本性質を良く表す空間的に１次元の方程式を取り上げ，その解法を物理学の教科書にしたがって記述するために，文献[1]のpp.347-348をそのまま引用する。

『13.1　ダランベール：１次元の波動方程式

波動関数が空間の１変数，例えば x にしか依存しない場合，波動方程式は

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x,t)=0 \tag{1}$$

になる。この形の方程式は1747年にダランベールが弦の振動に関して初めて論じた。変数 x, t の代わりに, $u = x - ct$, $v = x - ct$ を独立変数に取り直すと，波動関数ψ(u,v)の満たす波動方程式は

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,t)=-4\partial_u\partial_v\psi(u,v)=0 \tag{2}$$

のように書き直される。任意の v の関数を $H(v)$ とすると $\partial_v\psi(u,v)=H(v)$ である。これを v について積分し，積分定数を $F(u)$ とすると

$$\psi(u,v)=F(u)+\int^{v} dv'\,H(v') \tag{3}$$

が得られる。右辺第２項は任意の v の関数であるから，これを改めて $G(v)$ と書くと，$\psi(u,v)=F(u)+G(v)$ になる。元の変数に直すと

$$\psi(x,t)=F(x-ct)+G(x+ct) \tag{4}$$

が得られる。これが空間１次元の波動方程式の一般解で，ダランベールの解と呼ばれている。式 (3) の第１項は，$t = 0$ で $F(x)$ によって表される波が時間とともにその形を変えず，xの正の方向に一定速度 c で進行していく平面波を表している。第２項は，$t = 0$ での $G(x)$ が x の負の方向に c で進行していく解である。つまり波動方程式(1)は任意の波形が光速度 c で進行する解だけを持つ。

一般に微分方程式の時間に関する境界値問題，すなわち初期値問題をコーシー問題という。F と G は初期条件で決まる。$t = 0$で波動関数とその時間に関する導関数が任意の関数 $\varphi(x)$ と $\varphi_1(x)$ によって

$$\psi(x,0)=F(x)+G(x)=\varphi(x) \tag{5a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,0)=-c\{F'(x)-G'(x)\}=\varphi_1(x) \tag{5b}$$

のように与えられたとき，最初の式と，後の式を積分した式から

$$F(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x dx'\,\varphi_1(x')+\frac{1}{2}\{F(0)-G(0)\} \tag{6}$$

$$G(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x dx'\,\varphi_1(x')-\frac{1}{2}\{F(0)-G(0)\} \tag{7}$$

が得られる。こうして波動方程式は

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2}\{\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dx'\,\varphi_1(x') \tag{8}$$

のように完全に解くことができる。』

Ⅲ．リカッチ微分方程式

マクスウェル方程式から導かれる波動方程式は電界と磁界という二つの関数がともに波動方程式を満たす。また，量子力学で定義されたディラック方程式は，空間的に３次元の場合，４つの関数の連立偏微分方程式で表されるが，その４つの方程式を基にして，一つの関数のみで表される４つの方程式が得られ，その４つの方程式共に波動方程式の一種類と考えられる。

ところで，工学における自動制御，信号処理などの分野において最適問題を考えるときには，リカッチ微分方程式が現れる。最も簡単なリカッチ微分方程式であるスカラ・リカッチ微分方程式は，二つの関数の連立微分方程式で表され，その二つの関数の比が満たす方程式である。一方，波動方程式は２階の偏微分を含む方程式であり，リカッチ微分方程式とはなんら関係がないように思われる。しかしながら，マクスウェル方程式を介して観ると，実はリカッチ微分方程式は波動方程式を補う方程式と考えられる。そこでこの章では，リカッチ微分方程式が持つ性質と波動方程式を補完する部分とを述べる。

3.1　一般的なリカッチ微分方程式

文献[2]から，波動方程式を補完すると考えられる部分を抜き出して記述しておく。

スカラ・リカッチ微分方程式 $R[w](x)$ は次のように与えられる。

$$R[w](x) = \frac{d}{dx}w(x) + [a(x) + d(x)]w(x) + b(x)w^2(x) - c(x) = 0 \tag{9}$$

上式は次の線形同次一階微分方程式に関係する。

$$L_1[u,v](x) = -\frac{d}{dx}v(x) + c(x)u(x) - d(x)v(x) = 0 \tag{10a}$$

$$L_2[u,v](x) = \frac{d}{dx}u(x) - a(x)u(x) - b(x)v(x) = 0 \tag{10b}$$

スカラ・リカッチ微分方程式に対しては，次の定理が成り立つ。

[定理1]　式(10)の $[u(x),\ v(x)]$ の解が存在するときのみ，$u(x) \neq 0$，$w(x) = v(x)/u(x)$ とすることにより，式 (9) は解 $w(x)$ をもつ。

[定理2]　もし $w_0(x)$ が式 (9) の一つの解であるとき，次の関数を定義する。

$$g(x, x_0 \mid w_0) = \exp\{-\int_{x_0}^{x}[d(y) + w_0(y)b(y)]dy\} \tag{11a}$$

$$h(x, x_0 \mid w_0) = \exp\{-\int_{x_0}^{x}[a(y) + b(y)w_0(y)]dy\} \tag{11b}$$

$$f(x, x_0 \mid w_0) = \int_{x_0}^{x} g(y, x_0 \mid w_0)b(y)h(y, x_0 \mid w_0)dy \tag{11c}$$

このとき，

$$\xi = w(x_0) - w_0(x_0) \tag{12a}$$

なる ξ を定義し，

$$1 + \xi f(x, x_0 \mid w_0) \neq 0 \tag{12b}$$

であるときのみ，次の $w(x)$ は式 (9) の解となる。

$$w(x) = w_0(x) + \frac{g(x, x_0 \mid w_0)\, h(x, x_0 \mid w_0)\xi}{1 + \xi f(x, x_0 \mid w_0)} \tag{13}$$

以上の二つの定理の証明は文献[2] に示されているので省略する。

3.2　定数係数のリカッチ微分方程式

上記の記述では，リカッチ微分方程式が波動方程式に関係するようには表されていない。その関係が表されるようにするために，式 (10) の連立微分方程式において，*a(x), b(x), c(x), d(x)* をすべて定数 *a, b, c, d* となる場合を考える。すなわち，式 (10) は次のように表される。

$$-\frac{d}{dx}v(x) = -c \cdot u(x) + d \cdot v(x) \tag{14a}$$

$$-\frac{d}{dx}u(x)=-a\cdot u(x)-b\cdot v(x) \tag{14b}$$

このときのリカッチ微分方程式は式 (9) から，次のように与えられる。

$$\frac{d}{dx}w(x)+(a+d)w(x)+b\cdot w^2(x)-c=0 \tag{15}$$

上式の解は定数となるので，次の２次式の根である。

$$b\cdot w^2+(a+d)w-c=0 \tag{16}$$

上式の根は二つあるがその理由は後で考える。とにかく二つあるどちらかを，定理２に述べてある w_0 に選ぶことができる。

3.2.1　　$a=d$　の場合

次に波動関数との関係を示す方程式について考えよう。そのために

$$a=d \tag{17}$$

が成り立つ場合を考えよう。

式 (10a) を x で微分すると次式を得る。

$$-\frac{d^2}{dx^2}v(x)=-c\frac{d}{dx}u(x)+d\frac{d}{dx}v(x) \tag{18}$$

上式の１階の微分に式 (14a) および (14b) を代入して次式が得られる。

$$-\frac{d^2}{dx^2}v(x)=-c(au(x)+bv(x))+d(cu(x)-dv(x))$$

$$\therefore\quad \frac{d^2}{dx^2}v(x)=(bc+d^2)v(x) \tag{19a}$$

同様に，式 (14b) を x で微分して次式を得る。

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x)=(bc+a^2)u(x) \tag{19b}$$

式 (19a) および (19b) ではそこで用いられている関数は異なるが同一の式であり，１階の微分の項がないという特徴がある。ところで，式 (19) は常微分方程式であり，一方，波動方程式は式 (1) で表されるように偏微分方程式であるから，まだ式 (19) と式 (1) とが同一の方程式を表しているとはいえない。それについて次章で，波動方程式の原点となっているマクスウェル方程式に基づいて波動方程式を再考しておく。

3.2.2　　$a=-d$　の場合

ここでは，リカッチ微分方程式の特徴の一つを示すために，

$$a=-d \tag{20}$$

の場合を考えておこう。

この場合，式 (14) の連立微分方程式は次のような行列方程式で表される。

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} v(x) \\ -u(x) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v(x) \\ -u(x) \end{bmatrix}=0 \tag{21}$$

この方程式は式 (20) の条件のために，3.2.1 の場合とは異なって v(x) あるいは u(x) のみの関数に対する方程式で表すことができない。そのため，式 (21) を解くためには式 (21) の行列の固有値およびそれに対する固有ベクトルを求めて解かなければならない。この解は一般化波動方程式に対して極めて重要なので，一般化波動方程式のところで述べるので，ここでは述べない。

Ⅳ．マクスウェル方程式

この章では，まずマクスウェル方程式の定義を述べ，次にマクスウェル方程式に基づいて空間的に１次元の波動方程式を導出する。この方法によれば，二つの関数が共に同一の波動方程式を満足し，その二つの関数の連立微分方程式はリカッチ微分方程式を満たすことが示される。その結果，Ⅱ章で示した物理学での解法とは異なって，二つの関数の比および二つの関数の積が重要な特徴のある性質を持つことを回路理論で示せる可能性がある。

4.1　真空中のマクスウェル方程式

種々の波動方程式の基はマクスウェル方程

式である。マクスウェル方程式の書き方はいろいろあるが，ここでは文献[1]を参考にして，最も基本となる真空中の非相対論的な電磁界の式を，まず示しておく。

$$\nabla\times E=-\frac{\partial}{\partial t}B \tag{22a}$$

$$\nabla\times B=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E+\mu_0 J \tag{22b}$$

$$\nabla\cdot E=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{22c}$$

$$\nabla\cdot B=0 \tag{22d}$$

ここに，E は電界，B は磁界，μ_0 は真空の透磁率，ε_0 は真空の誘電率，J は電流密度，ρ は電荷密度をそれぞれ表す。

なお，式 (22) の∇は

$$\nabla=e_x\frac{\partial}{\partial x}+e_y\frac{\partial}{\partial y}+e_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{23a}$$

と表され，ナブラと呼ばれるベクトル演算子であり，

$$\nabla\times E=rotE=curlE \tag{23b}$$

$$\nabla\cdot E=divE \tag{23c}$$

と表されることもある。

また，電界および磁界はスカラーポテンシャル ϕ およびベクトルポテンシャル A によって，次のように表される。

$$B=\nabla\times A \tag{24a}$$

$$E=-\nabla\phi-\frac{\partial}{\partial t}A \tag{24b}$$

マイクロ波回路では，誘電率が ε の媒質を用いたストリップ線路や導波管などを用いてマイクロ波を受動的に制御していて，そのときの電源部は回路を示すブラックボックスの外におく。そのため，マイクロ波回路では式 (17) における J および ρ を 0 とする。このようにして，透磁率が μ，誘電率が ε の媒質中のマクスウェル方程式を回路理論で考えるときは，電気変位 D，磁界の補助場 H を用いて，次のように表される。

$$\nabla\times E=-\frac{\partial}{\partial t}B \tag{25a}$$

$$\nabla\times H=\frac{\partial}{\partial t}D \tag{25b}$$

$$D=\varepsilon E \tag{25c}$$

$$H=\frac{1}{\mu}B \tag{25d}$$

4.2　波動方程式の導出

式 (1) は空間的に 1 次元の波動方程式を表していた。ここでは，式 (25) に基づいて空間的に 1 次元の波動方程式を導出しよう。

回路理論での表現を用いるために，電圧 $v(x,t)$ と電流 $i(x,t)$ とを用いることにし，E を電圧，H を電流に対応させる。また，マクスウェル方程式でよく知られているように E と H とは直交しているために，演算子 $\nabla\times$ の作用は位置 x での偏微分に置き換えられ，しかも E および H に演算子 $\nabla\times$ を施すと符号が正負逆になる。したがって，式 (25) は次のように書くことができる。

$$-\frac{\partial}{\partial x}v(x,t)=\mu\frac{\partial}{\partial t}i(x,t) \tag{26a}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}i(x,t)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}v(x,t) \tag{26b}$$

式 (26) から波動方程式を導出しよう。式 (26a) を x で偏微分し，式 (26b) を t で偏微分して次式が得られる。

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t)=\mu\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}i(x,t) \tag{27a}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}i(x,t)=\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t) \tag{27b}$$

式 (27a) に式 (27b) を代入して，次式を得る。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,t)=\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x,t) \tag{28}$$

上式において，その媒質中の波動の伝搬速度を u とすると，次式で表される。

$$u=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{29}$$

したがって，式 (28) は次のように表現される。

$$\left(\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)v(x,t)=0 \tag{30}$$

上と同様の手法で，次式も得られる。

$$\left(\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)i(x,t)=0 \tag{31}$$

式 (30) と式 (31) とは関数は異なるが，同一の方程式であり，式 (1) と比べると光速度 c が伝搬速度 u に変わっただけの式であるから，やはり波動方程式である。すなわち，マクスウェル方程式からは，電圧 v(x,t) と電流 i(x,t) という二つの関数が同一の波動方程式を満足することが得られる。この波動方程式の基になっているのが式 (26) の連立偏微分方程式である。したがって，マクスウェル方程式から導かれる波動方程式を解くには式 (26) から求めてゆかなければならない。なお，式 (26) の連立偏微分方程式は式 (14) で与えられるリカッチ微分方程式とは異なるように見えるが，実は式 (26) からリカッチ微分方程式を導けるので，次節でそのことを示す。

4.3　工学における波動方程式の解法

電磁気工学などの各工学分野では，波動方程式を式 (26) のマクスウェル方程式に基づいて解く。その場合，応用を考えると周波数によって特性が異なる。例えば，ある周波数では完全透過であっても，それと異なるある周波数では全反射に近いものも作れる。そのため，周波数特性を重視して波動方程式を解く。

また，電磁界理論では，電界および磁界は角周波数ωの波動を $e^{j\omega t}$ という指数関数で表し，三角関数は用いない。すなわち，角周波数ωの波動のみを考えるのであって，角周波数－ωの波動はまったく別の波動と考える。

このようにωと－ωとを区別する必要のある工学分野として，信号処理の分野がある。そこでは，Z 変換という手法を用いて「時間遅れ」ということを重視する。そのとき，プラスとマイナスとを逆転すると時間遅れが時間の進みに変わり，信号処理での基準を乱すことになる。

とにかく，電圧および電流の波動は $e^{j\omega t}$ の項を持ち，次のように表される。

$$v(x,t)=V(x)e^{j\omega t} \tag{32a}$$
$$i(x,t)=I(x)e^{j\omega t} \tag{32b}$$

上式を式 (26) に代入して，次式を得る。

$$-\frac{d}{dx}V(x)=j\omega\mu I(x) \tag{33a}$$

$$-\frac{d}{dx}I(x)=j\omega\varepsilon V(x) \tag{33b}$$

上に得られた方程式は連立微分方程式であって，式 (14) の定係数のリカッチ微分方程式と同じということができる。そこで，式 (14) の方程式と式 (33) とを比べると次の関係が得られる。

$$v(x)\Rightarrow V(x) \tag{34a}$$
$$u(x)\Rightarrow I(x) \tag{34b}$$
$$-c\Rightarrow j\omega\mu \tag{34c}$$
$$-b\Rightarrow j\omega\varepsilon \tag{34d}$$
$$a=d=0 \tag{34e}$$

定係数のリカッチ微分方程式の解は式 (16) の２次方程式の解となり，次の解が得られる。

$$w=\pm\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{35}$$

式 (35) を電気回路に関係した分野では，特性インピーダンス Z_0 と呼ぶ重要な量である。ところで，回路理論では頻繁に「インピーダンス」を用いるが，集中定数回路では複素数になるから重要となる。それに対してここで用いているものは特性インピーダンスであって，実数となっている。実数になっていることがマクスウェル方程式に対して重要となることは後の章で詳しく述べる予定である。とにかく，マクスウェル方程式から得られる特性インピーダンスは実数になるので，それを「特性抵抗 R_0」と呼び，次のように表す。

$$R_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{36}$$

特性インピーダンスは回路理論では極めて重要な量であるが，一方，物理学では，この量を重要視しているとは思われないことを注意しておこう。その理由はいろいろと考えられるが，インピーダンスは比で与えられるから線形ではないことと，ヒルベルト空間の量と考えないで，回路空間の量と考えたほうがよいこととが考えられる。

波動方程式の解法に戻ることにして，式 (33a) を x で微分したものに式 (33b) を代入して，次式を得る。

$$\frac{d^2}{dx^2}V(x) = -\omega^2\mu\varepsilon V(x) = \gamma^2 V(x) \tag{37a}$$

同様に次式も得られる。

$$\frac{d^2}{dx^2}I(x) = -\omega^2\varepsilon\mu I(x) = \gamma^2 I(x) \tag{37b}$$

ここに，γは伝搬定数と呼ばれていて，式 (37) では次のように表される。

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\beta \tag{38}$$

上に示したように，この場合のγが純虚数と成るので，式 (38) のように表され，βを位相定数と呼ぶ。

式 (37a) は線形同次２階の微分方程式であるから，式 (38) の jβを用い，積分定数 K_1 および K_2 を用いて，次のように表される。

$$V(x) = K_1 e^{-j\beta x} + K_2 e^{j\beta x} \tag{39}$$

この式を式 (33a) に代入して，式 (36) の特性抵抗 R_0 を用いて，I(x) を求めると次のように表される。

$$I(x) = \frac{K_1}{R_0}e^{-j\beta x} - \frac{K_2}{R_0}e^{j\beta x} \tag{40}$$

このように，マクスウェル方程式から導かれた波動方程式には二つの関数が解となり，式 (38) と式 (32) とを合わせて，次のような関数として求まる。

$$v(x,t) = K_1 e^{j\omega t - j\beta x} + K_2 e^{j\omega t + j\beta x} \tag{41a}$$

$$i(x,t) = \frac{K_1}{R_0}e^{j\omega t - j\beta x} - \frac{K_2}{R_0}e^{j\omega t + j\beta x} \tag{41b}$$

4.4　物理学の解法の疑問とその理由

ところで，Ⅱ章において波動方程式の解法を述べたが，その解で得られる式 (8) と，今得られた式 (41) とを比較するとかなり異なるように見える。そこで，マクスウェル方程式から得られる波動方程式の解法から見ると，Ⅱ章の解法では疑問となる点と，その理由を考えておこう。

空間的に１次元の波動方程式は式 (1) で与えられる。その方程式は式 (2) のように分解されると書かれているが，適当であろうか？

すなわち，

[疑問1]　波動方程式 (1) は式 (2) のように分解できるであろうか。

式 (26) の $v(x,t)$ および $i(x,t)$ は共に波動方程式を満足するので式 (1) を満たすが，式 (2) のように分解できることは示されていない。私は式 (1) で与えられる波動方程式を，マクスウェル方程式の与えられ方を考えずに，とにかく数学的に見るだけで，式 (2) のように分解することが波動方程式およびその解である波動関数の重要な特徴をなきものにしていると考えている。また，式 (26) のように表すのであれば，リカッチ微分方程式との関係を用いることができ，その定理のもつ性質を利用できる。

ところで，物理学では波動方程式の解をダランベールの解である式 (4) のように表すが，マイクロ波回路の参考書では，式 (4) のようには表さない。それを疑問の２番目とする。すなわち，

[疑問2]　マイクロ波回路では周波数特性を求めるのが重要となる。ところで，式 (4) では周波数特性を求めることが出来ない。どのような式で表現すれば周波数特性を容易に求められるか。

周波数特性などは回路理論に関係するため，この疑問の理由付けには回路理論で使われる説明が必要なので，ここではそれをとにかく使って説明する。

マクスウェル方程式の電界および磁界は時間 t を含んでいて，時間 t での偏微分が含まれている。工学で電磁界を解くときはフィルタの構成などに利用するため，共鳴現象など周波数特性が重要になる。すなわち，角周波数ωの波の振る舞いが重要なので，変数分離するときは exp($j\omega t$)を用い，またラプラス変換を用いるときは，d/dt をラプラス変換して s に変換し，定常状態では $s=j\omega$ と置くので，変数分離と同じで exp($j\omega t$) を用いている。物理学の教科書では波動方程式の解である波動関数を sin や cos の三角関数で表す場合が見うけられるが，三角関数を用いると角周波数ωの波動と同時に－ωの波動も扱うことになる。

回路理論ではインダクタンス L のインピーダンスは $j\omega L$ であって，決して$-j\omega L$ ではない。このことは回路理論では角周波数ωの波を考えているのであり，－ωの波を考えてはいない。

このように，波動関数の時間 t を含む項は exp($j\omega t$) と表されるから，式 (1) の波動方程式に対する時間項による偏微分が消えて位置 x による２階の同次方程式に書き表され，純虚数の伝搬定数である位相定数βのみが求まる。ここで，βは正数として exp($-j\beta x$) は右に進行する波，exp ($j\beta x$) は左に後進する波を表す。これは，位相定数βが

$$\beta = \frac{\omega}{c} \tag{42}$$

と表されるために，$j\omega$ をラプラス変換の変数 s に戻すと，

$$\exp(-j\beta x) = \exp(-sT) \tag{43a}$$

ここに

$$T = \frac{x}{c} \tag{43b}$$

と表され，信号処理で用いる z 変換の表現が得られ，exp($-sT$) は遅れを，exp(sT) は進みを表すことに一致する。したがって，式 (4) の表し方は回路理論，マイクロ波回路および信号処理では，

$$\exp(j\omega t - j\beta x) \tag{44a}$$

および

$$\exp(j\omega t + j\beta x) \tag{44b}$$

が用いられ，式 (41) が得られる。この表現なら角周波数ωが陽に現れているので，周波数特性が容易に求められる。

式 (4) までの式に対してこのような疑問が浮かぶので，それ以降の式に対しても，次のような疑問が浮かぶ。

[疑問3]　式 (5) － 式 (8) の表現は波動方程式の解として適切であろうか。

疑問1に答えたように，マクスウェル方程式には式 (2) のような分解の式は存在しない。したがって，式 (5b) が成り立つかどうか疑問である。

マクスウェル方程式は電界と磁界という二つの関数が定義されているために，インピーダンスが求められるし，電力も求めることができる。電力は複素電力であって，有効電力と無効電力とに分けられ，エネルギーの伝送は有効電力の問題である。波動方程式は微分方程式であるから，式 (5) のような初期値問題が登場するが，この初期値がエネルギーの伝送に関係するのは極く特殊な過渡現象のときのみである。すなわち，初期値の電圧と電流とがマクスウェル方程式を満足するときのみ解となる。そのため，式 (6) - (8) に書かれている積分の項は一般にはマクスウェル方程式を満足しない。したがって，波動方程式に対する初期値問題であっても，電界と磁界あるいは電圧と電流という二つの関数に基づいていることが重要なのである。なお，これらはリカッチ微分方程式にも関連付けられることが多い。

このように考えると，波動方程式および波動関数についは，エネルギーの保存則に深く関係する回路理論に基づいて考える必要があり，その中で特に重要な「無損失性」を考慮に入れて波動方程式を考え直そう。

V．縦続行列と無損失性

波動方程式を解いて波動関数 (41) が得られたことは，信号を伝送する伝送線路をわれわれが得たことを意味する。したがって，この伝送線路の周波数特性をうまく利用してフィルタなどの信号を処理したり，制御したりする回路を作れる可能性があることを求めたことになる。それらの回路を設計するには，その伝送線路の縦続行列を求めておくのが得策である。

このようなことを考えて，この章では式 (41) の波動関数の縦続行列をまず求め，次に回路設計では極めて重要な「無損失性」の定義を述べ，マクスウェル方程式から導出された波動関数 (41) の縦続行列が無損失性を満足することを明らかにしておこう。

5.1　波動関数の縦続行列

回路理論では縦続行列が重要であり，式 (39)，(40) を用いた場合の長さ l の伝送線路の縦続行列は，例えば $x=0$ の電圧 $V(0)$ と電流 $I(0)$ および $x=l$ の電圧 $V(l)$ と電流 $I(l)$ との関係が次のように表されるものである。

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(l) \\ I(l) \end{bmatrix} \tag{45}$$

ここで，縦続行列の要素 A,B,C,D を式 (39)，(40) を用いて実際に求めよう。

$x=0$ における電圧 $V(0)$ および電流 $I(0)$ を求めると

$$V(0) = K_1 + K_2 \tag{46a}$$

$$I(0) = \frac{K_1}{R_0} - \frac{K_2}{R_0} \tag{46b}$$

したがって，

$$2K_1 = V(0) + R_0 I(0) \tag{47a}$$

$$2K_2 = V(0) - R_0 I(0) \tag{47b}$$

上の二つの式を式 (39)，(40) に代入して，

$$V(x) = \cos\beta x V(0) - jR_0 \sin\beta x I(0) \tag{48a}$$

$$I(x) = -j\frac{1}{R_0}\sin\beta x V(0) + \cos\beta x I(0) \tag{48b}$$

上の関係を行列にまとめると，

$$\begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta x & -jR_0 \sin\beta x \\ -j\frac{1}{R_0}\sin\beta x & \cos\beta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} \tag{49}$$

式 (49) の行列に $x=l$ を代入すると，長さ l の縦続行列に似ているが実は少し異なる形の行列が求まる。そこで，ここでは長さ l だけ座標を左にずらして，次のようにして縦続行列を求める。

$$\begin{bmatrix} V(-l) \\ I(-l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta l & jR_0 \sin\beta l \\ j\frac{1}{R_0}\sin\beta l & \cos\beta l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} \tag{50}$$

5.2　無損失条件

物理的現象では「エネルギーの保存則」は重要な条件であり，力学では運動のエネルギーと位置のエネルギーとの和が「エネルギーの保存則」を満足する。それに対して，電気現象では電圧と電流とが組みになっているので電力が「エネルギーの保存則」の条件となる。電力は複素電力で表され，有効電力と無効電力とに分けられる。エネルギーの保存則に関係する電力は有効電力だけである。

集中定数回路の抵抗を除いた素子は無損失素子であるから，集中定数回路の無損失性は抵抗を用いていないという簡単な条件となる。それに対して，ここで考えている波動関数で与えられる回路素子を用いるときは，有効電力の伝送を考えねばならないので，縦続行列の条件として与えるのが簡明であり，次のように書くことができる。

[無損失なるための縦続行列の条件]　二端子対回路が無損失なるための縦続行列の条件は次のように与えられる。

$$\begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{51a}$$

ただし，A^* などは A などの共役複素数を表す。
上の条件は縦続行列が「Ｊ－ユニタリ行列」であると呼ばれる[3]。
Ｊ－ユニタリ行列の条件は次のように表せる。

$$|AD - BC| = 1 \tag{51b}$$

$$AD^* + BC^* = AD^* + B^*C = 1 \tag{51c}$$

$$\begin{aligned} &Re\,[AB^*] = Re\,[AC^*] \\ &= Re\,[BD^*] = Re\,[CD^*] = 0 \end{aligned} \tag{51d}$$

5.3 波動関数の縦続行列の特徴

マクスウェル方程式から得られる波動関数の長さ ℓ の素子に対する縦続行列 (50) は式 (51) の無損失性を満足することは容易に示される。

ところで，物理学では波動関数をできるだけ三角関数として表そうとしていて，それが反映して式 (4) のような表し方をする。そのため，波動関数(41)ももちろん三角関数で表わそうとしている。それに対して，本文では波動関数を式 (39)，(40) のように指数関数を用いて表しているが，物理学ではその式も三角関数で表わそうとしている。そのような観点で見れば式 (50) の縦続行列は三角関数で表されていて，波動関数は三角関数で表すのが適しているように見える。

行列がどのような数で表現されているかを知る一つの方法は行列の固有値と固有ベクトルを求めることである。そこで，式 (50) の固有値と固有ベクトルとを求めて，式 (50) の性質を求めておこう。固有値は次の行列式から導かれるΛの２次方程式の根である。

$$\begin{vmatrix} \cos \beta l - \Lambda & jR_0 \sin \beta l \\ jR_0^{-1} \sin \beta l & \cos \beta l - \Lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{52}$$

したがって，固有値Λは次のように求まる。

$$\Lambda_1 = \exp(j\beta l) \quad および \quad \Lambda_2 = \exp(-j\beta l) \tag{53}$$

この二つの固有値とそれに対する固有ベクトルとは，それぞれ次のように表される。

$$\begin{pmatrix} \cos \beta l & jR_0 \sin \beta l \\ jR_0^{-1} \sin \beta l & \cos \beta l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \exp(j\beta l) \begin{pmatrix} R_0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{54a}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \beta l & jR_0 \sin \beta l \\ jR_0^{-1} \sin \beta l & \cos \beta l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0 \\ -1 \end{pmatrix} = \exp(-j\beta l) \begin{pmatrix} R_0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{54b}$$

このように，縦続行列は三角関数で表されているが，固有値は指数関数で表されるので，縦続行列の本体は指数関数であるといえる。

指数関数にこだわるのは，指数関数を用いると信号処理で用いるｚ変換に関係付けることができ，時間の遅れや進みを明確にできる。それに対して，三角関数を用いると無限に同じ状態が続いているように表され，波動が動いている状態がよくは表されない。

Ⅵ．無損失一般化波動関数

マイクロ波回路ではマクスウェル方程式の利用から始まり，21世紀には無損失回路となるキラルやBI(bi-isotropic，複等方性）媒質の利用も視野に入れた研究が必要といわれている[4]。

ところで，集中定数回路においては無損失回路は抵抗を用いていない回路であり，リアクタンスのみで構成されるから，回路関数の条件はリアクタンス条件で与えられる。それに対して，偏微分方程式で与えられる場合は，それほど簡単ではない。そこで，例えば縦続行列がどのように与えられるかを調べておく必要がある。また，マクスウェル方程式から解かれる波動関数ではどのようなところが一般化されるかをも調べる必要がある。
ここでは，文献[4]を参照して無損失の波動方程式や波動関数の一般化であるキラルやBI 媒質の方程式を導き，それらが無損失となることを一般的に示しておこう。

6.1　無損失の波動関数

Ⅱ章のマクスウェル方程式で示した電界や

磁界の式はすべて時間 t を含んでいる。工学で電磁界を解くときは，角周波数ωの波を用いるため，時間 t を含む項は変数分離されて $\exp(j\omega t)$ と表され，時間での偏微分は $j\omega$ で表すことを示す。したがって，式 (25a) および式 (25b) は次のように時間を含まない式で表される。

$$\nabla \times E = -j\omega B \tag{55a}$$

$$\nabla \times H = j\omega D \tag{55b}$$

波動方程式を拡張する一歩として，文献[4]では上式における B および D が，次のように表されるものを提案している。

$$B = \zeta E + \mu H \tag{56a}$$

$$D = \varepsilon E + \xi H \tag{56b}$$

なお，文献[4]には無損失回路になる媒質をキラルおよび BI 媒質と呼び，次のように表されると仮定している。

$$\zeta = (\chi + j\kappa)\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \tag{57a}$$

$$\xi = (\chi - j\kappa)\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \tag{57b}$$

ここで，ε，μ，χ，κはすべて実数。なお，文献[4]では，表1のように分類されている。

	Nonchiral ($\kappa = 0$)	Chiral ($\kappa \neq 0$)
Reciprocal ($\chi = 0$)	Simple medium	Pasteur medium
Non-reciprocal ($\chi \neq 0$)	Tellegen medium	Bi-Isotropic medium

表1　キラルおよび BI 媒質の分類

6.2　無損失性の証明

無損失一般化波動方程式で最も一般化されているのは BI 媒質である。BI 媒質における波動方程式は，式 (55) - (57) に表されている。ここでは式を簡単に表すために，その式の中のωを省略し，次のように表す。

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j\chi + \kappa & j\mu \\ j\varepsilon & j\chi - \kappa \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix} = 0 \tag{58}$$

上式から導かれる縦続行列がＪ－ユニタリになることを文献[5]に従って示しておく。

式 (58) の発展方程式の解は，$x=0$ の初期値から次のように求まる。

$$\begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix} = \exp\left(-x\begin{bmatrix} j\chi + \kappa & j\mu \\ j\varepsilon & j\chi - \kappa \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = A(x)\begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} \tag{59}$$

ここに，$A(x)$ は長さ $-x$ の媒質の縦続行列を表す。この縦続行列が次のJ-ユニタリ行列となることを示す。

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{60}$$

$A(x)$ がＪ－ユニタリになる条件は次式を満足することである。

$$A(x)^* \cdot J \cdot A(x) = J \tag{61}$$

ここに上付けの＊は共役転置を表す。

[証明]

$$1_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{62a}$$

$$B = \begin{bmatrix} j\chi + \kappa & j\mu \\ j\varepsilon & j\chi - \kappa \end{bmatrix} \tag{62b}$$

と表すと，式 (61) の関係は

$$\exp(-xB^*) \cdot J \cdot \exp(-xB) = J \tag{63}$$

まず，次の関係が得られる。

$$\exp(-0 \cdot B^*) = \exp(-0 \cdot B) = 1_2 \tag{64}$$

よって，$x=0$ で式(61)が成立している。式 (61) がすべての x で成り立つための必要十分条件は

$$\frac{d}{dx}\{\exp(-xB^*) \cdot J \cdot \exp(-xB)\} = 0 \tag{65}$$

微分の公式から

$$\frac{d}{dx}\exp(-xB) = -B \cdot \exp(-xB) = -\exp(-xB) \cdot B \tag{66a}$$

$$\frac{d}{dx}\exp(-xB^*) = -B^* \cdot \exp(-xB^*) = -\exp(-xB^*) \cdot B^* \tag{66b}$$

上の二つの式を用いると

$$\frac{d}{dx}\{\exp(-xB^*) \cdot J \cdot \exp(-xB)\}$$

$$= \frac{d}{dx}\exp(-xB^*) \cdot J \cdot \exp(-xB)$$

$$+\exp(-xB^*)\cdot J\cdot\frac{d}{dx}\exp(-xB)$$
$$=-\exp(-xB^*)\cdot\{B^*\cdot J+J\cdot B\}\cdot\exp(-xB) \tag{67}$$

したがって，式 (65) が成り立つ必要十分条件は

$$B^*\cdot J+J\cdot B=0 \tag{68}$$

上の関係を求めてみよう。

$$B^*\cdot J+J\cdot B=$$
$$\begin{bmatrix}-j\chi+\kappa & -j\varepsilon\\ -j\mu & -j\chi-\kappa\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}j\chi+\kappa & j\mu\\ j\varepsilon & j\chi-\kappa\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-j\varepsilon & -j\chi+\kappa\\ -j\chi-\kappa & -j\mu\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}j\varepsilon & j\chi-\kappa\\ j\chi+\kappa & j\mu\end{bmatrix}=0 \tag{69}$$

［証明終り］

Ⅶ. 無損失一般化波動関数の縦続行列

VI章で無損失の波動関数となる無損失一般化波動方程式が得られた。無損失一般化波動関数を回路素子として利用するには，その縦続行列を求めておくのが得策である。そこでこの章では縦続行列を求める。

7.1　Pasteur 媒質

波動方程式を一般化するときに，連立微分方程式における行列の主対角要素の係数が実数になる表1における Pasteur 媒質から考える。

ところで，式(55) はベクトルの回転で表されていて，方向によって符号が反転する。そこで，連立微分方程式の表し方は媒質の性質を変えない範囲内で変形して表すことにする。

Pasteur 媒質の波動方程式は，次の連立微分方程式で表される。

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix}V(x)\\ I(x)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega\kappa_a & j\omega\mu\\ j\omega\varepsilon & -\omega\kappa_a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V(x)\\ I(x)\end{bmatrix}=0 \tag{70}$$

この波動方程式の主対角要素は逆符号なので，リカッチ微分方程式の関係で見ると式 (17) を満たす場合となっていて，*V(x)* のみおよび *I(x)* のみの波動方程式が得られる。すなわち，この方程式では，*V(x)* も *I(x)* も同一の次の方程式を満足する。

$$\frac{d^2}{dx^2}V(x)=-\omega^2\left(\varepsilon\mu-\kappa_a{}^2\right)V(x)=\gamma^2V(x) \tag{71a}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}I(x)=\gamma^2I(x) \tag{71b}$$

伝搬定数γが純虚数のとき位相定数となり，信号が伝わることを表す。したがって，

$$\varepsilon\mu-\kappa_a{}^2>0 \tag{72}$$

のとき，次の位相定数βが求まる。

$$\gamma=j\omega\sqrt{\varepsilon\mu-\kappa_a{}^2}=j\beta \tag{73}$$

この媒質の二つの波動関数は次のように表される。

$$V(x)=N_1Z_{0f}e^{-j\beta x}+N_2Z_{0b}e^{j\beta x} \tag{74a}$$

$$I(x)=N_1e^{-j\beta x}-N_2e^{j\beta x} \tag{74b}$$

ここに，

$$Z_{0f}=\frac{\sqrt{\varepsilon\mu-\kappa_a{}^2}-j\kappa_a}{\varepsilon}=R_p+jX_p \tag{75a}$$

$$Z_{0b}=\frac{\sqrt{\varepsilon\mu-\kappa_a{}^2}+j\kappa_a}{\varepsilon}=Z_{0f}{}^*=R_p-jX_p \tag{75b}$$

と表される。すなわち，マクスウェル方程式の解は右に進行する波も左に後進する波の特性インピーダンスが等しく特性抵抗R_0であった。それに対して，Pasteur 媒質の波動では左右に進む波の特性インピーダンスは異なっていて，Z_{0f} は右に進行する進行波の特性インピーダンスを表し，Z_{0b} は左に後進する後進波の特性インピーダンスを表す。その原因は式 (70) で表されるように主対角要素が互いに逆符号になっていて，対称回路となっていないためである。それにもかかわらず，この回路が無損失であるために，左右に進行する波の特性インピーダンスは複素数となっていて互いに共役複素数になっている。

式 (74) を用いれば，回路的に表わされた媒質の長さ *l* の縦続行列は，次のように表される。

$$\frac{1}{Z_{0f}+Z_{0b}}\begin{bmatrix}Z_{0f}e^{j\beta l}+Z_{0b}e^{-j\beta l} & Z_{0f}Z_{0b}\left(e^{j\beta l}-e^{-j\beta l}\right)\\ e^{j\beta l}-e^{-j\beta l} & Z_{0b}e^{j\beta l}+Z_{0f}e^{-j\beta l}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{R_p\cos\beta l-X_p\sin\beta l}{R_p} & \dfrac{j\sin\beta l\left(R_p{}^2+X_p{}^2\right)}{R_p}\\ \dfrac{j\sin\beta l}{R_p} & \dfrac{R_p\cos\beta l+X_p\sin\beta l}{R_p}\end{bmatrix} \tag{76}$$

式(76)の縦続行列の要素を用いると，

$$AD-BC=1 \tag{77}$$

が求まり，相反性を満たす。

ところで，文献[6]において外部の助けをまったく借りずに空間を伝わる波は電界と磁界の双方を精密に同調させる必要があると述べているが，Pasteur 媒質では左右に進行する二つの波のどちらの特性インピーダンスも複素数となっていて電界と磁界は同調していない。それにもかかわらず，無損失回路となり，共鳴したとき入力エネルギーがすべて出力に伝えられるのはどうしてであろうか。

私の考えは次の通りである。瞬時的に，あるいは過渡的に波を伝えるには同調，すなわち電界と磁界の二つの波の位相を同一にして有効電力を伝えることが最大エネルギーを伝えるのに必要である。それに対して，過渡現象のときは多重反射をして，定常状態となったときに共鳴状態となって入力から出力へ伝送されているように表されているのが，インピーダンスが互いに複素共役になっていて共役整合しているときと考えられる。このように波動を回路理論的に考えるときは過渡状態と定常状態とを区別して考えることができる。

ところで，文献[7]にホイヘンスの原理が，１および３次元 Euclid 空間における波動と，２次元 Euclid 空間における波動とは異なることが説明されている。私はこの違いは定常状態における式での表現が少し異なるだけで，過渡現象では同心円状に波が広がり続けるという説明通りの現象であると考えている。すなわち，ここでも過渡現象と定常状態とを区別して考えることが重要と考えられる。なお，ホイヘンスの原理では異なる媒質に波動が直面したとき，透過波の説明のみが重要視されているが，反射波を考えておかないと定常状態での共鳴現象を説明できない。

7.2　Tellegen 媒質

文献[4]で Tellegen medium と名付けられた，連立微分方程式の行列の主対角要素が等しい媒質における波動方程式を考察しておこう。

式 (70) とは主対角要素の符号が異なり，非対角要素は式 (70) と同じに与えられる，次の連立微分方程式を満足する波動を考えよう。

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix}V(x)\\ I(x)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}j\omega\chi_a & j\omega\mu\\ j\omega\varepsilon & j\omega\chi_a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V(x)\\ I(x)\end{bmatrix}=0 \tag{78}$$

上式の行列の主対角要素が等しいためにリカッチ微分方程式では式 (20) を満たす場合となる。そのため，マクスウェル方程式を解く手法は使えない。そこで，連立微分方程式の行列の固有値と固有ベクトルを求める手法で解こう。

固有値

$$\gamma_1=j\omega\chi_a+j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=j\beta_1 \tag{79a}$$

に対する固有ベクトル

$$\begin{bmatrix}R_{0l}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\\ 1\end{bmatrix} \tag{79b}$$

固有値

$$\gamma_2=j\omega\chi_a-j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=-j\beta_2 \tag{80a}$$

に対する固有ベクトル

$$\begin{bmatrix}R_{0l}\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}\\ -1\end{bmatrix} \tag{80b}$$

この場合，二つの伝搬定数は虚数であるが，等しいわけではない。これは右に進行する波と左に後進する波との伝搬速度が異なることを表している。すなわち，動いている物体での音の効果と同じで，ドップラー効果のある波動を表している。それに対して，二つの特性インピーダンスは等しく，しかも実数となるから，二つの左右に進行する波は等しい特性抵抗をもつことになるので，それをR_0と表す。

以上の式を用いれば，式 (78) の Tellegen 媒質の *V(x)* および *I(x)* は次のように表される。

$$V(x) = N_1 R_c \exp(-j\beta_1 x) + N_2 R_c \exp(j\beta_2 x) \quad (81a)$$

$$I(x) = N_1 \exp(-j\beta_1 x) - N_2 \exp(j\beta_2 x) \quad (81b)$$

上式から，Tellegen 媒質の長さが ℓ の縦続行列が次のように求まる。

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\exp(j\beta_1 l) + \exp(-j\beta_2 l)}{2} & \dfrac{R_c\{\exp(j\beta_1 l) - \exp(-j\beta_2 l)\}}{2} \\ \dfrac{\exp(j\beta_1 l) - \exp(-j\beta_2 l)}{2R_c} & \dfrac{\exp(j\beta_1 l) + \exp(-j\beta_2 l)}{2} \end{bmatrix} \quad (82)$$

上式の縦続行列の要素を用いると次式が得られる。

$$AD - BC = \exp\{j(\beta_1 - \beta_2)l\} \quad (83a)$$

したがって，次のように表される。

$$|AD - BC| = 1 \quad (83b)$$

このように，Tellegen 媒質は相反回路とはならないことに注意しておこう。

7.3　Bi-isotropic 媒質

表1に示されている BI 媒質（Bi-isotropic medium）における波動方程式は，次の連立微分方程式を満足する。

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j\omega\chi_a + \omega\kappa_a & j\omega\mu \\ j\omega\varepsilon & j\omega\chi_a - \omega\kappa_a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix} = 0 \quad (84)$$

上式の行列の主対角要素がプラスマイナス反対符号の要素ではないので，マクスウェル方程式を解く手法である一つの関数のみで表される微分方程式を導くことができない。そこで，連立微分方程式の行列の固有値と固有ベクトルを求める手法で解こう。

このとき，固有値の一つは式 (79a) の $j\beta_1$で，の固有ベクトルの進行波成分の特性インピーダンスは式 (75a) のZ_{0f}と求まり，もう一つの固有値は式 (80a) の$-j\beta_2$で，その固有ベクトルの後進波成分の特性インピーダンスは式 (79b) のZ_{0b}と求まる。すなわち，

$$\gamma_1 = j\omega\chi_a + j\omega\sqrt{\mu\varepsilon - {\kappa_a}^2} = j\beta_1 \quad (85a)$$

に対する固有ベクトル

$$\begin{bmatrix} Z_{0f} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{\varepsilon\mu - {\kappa_a}^2} - j\kappa_a}{\varepsilon} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p + jX_p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (85b)$$

$$\gamma_2 = j\omega\chi_a - j\omega\sqrt{\mu\varepsilon - {\kappa_a}^2} = -j\beta_2 \quad (86a)$$

に対する固有ベクトル

$$\begin{bmatrix} Z_{0b} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{\varepsilon\mu - {\kappa_a}^2} + j\kappa_a}{\varepsilon} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p - jX_p \\ -1 \end{bmatrix} \quad (86b)$$

以上の式を用いれば，式 (84) の BI 媒質の *V(x)* および *I(x)* は次のように表される。

$$V(x) = N_1 Z_{0f} \exp(-j\beta_1 x) + N_2 Z_{0b} \exp(j\beta_2 x) \quad (87a)$$

$$I(x) = N_1 \exp(-j\beta_1 x) - N_2 \exp(j\beta_2 x) \quad (87b)$$

その結果，BI 媒質の長さ *l* の縦続行列が次のように求まる。

$$\frac{1}{Z_{0f} + Z_{0b}}\begin{bmatrix} Z_{0f}e^{j\beta_1 l} + Z_{0b}e^{-j\beta_2 l} & Z_{0f}Z_{0b}\left(e^{j\beta_1 l} - e^{-j\beta_2 l}\right) \\ e^{j\beta_1 l} - e^{-j\beta_2 l} & Z_{0b}e^{j\beta_1 l} + Z_{0f}e^{-j\beta_2 l} \end{bmatrix} \quad (88)$$

この縦続行列の要素を用いると，式 (83) と同様に，次の関係を得る。

$$AD - BC = \exp\{j(\beta_1 - \beta_2)l\} \quad (89a)$$

したがって，

$$|AD - BC| = 1 \quad (89b)$$

このように，BI 媒質も相反回路とはならない。

Ⅷ．むすび

物理学では力学と関連付けて波動方程式を考えるので，一つの関数のみがその波動方程式を満足するとしている。一方，電磁界理論ではマクスウェル方程式を電界と磁界とが満足し，電界および磁界がそれぞれ波動方程式を満たすことを示している。このように二つの関数が連立微分方程式を満たすことを特徴とするものにリカッチ微分方程式がある。この方程式は二つの関数の比が解となるものである。これをマクスウェル方程式に適用すると電界と磁界の比はインピーダンスを表し，

二つの関数の積は電力すなわちエネルギーを表す。エネルギーの観点から見ると，マクスウェル方程式を満たす電界と磁界とは無損失回路を構成し，エネルギーの保存則を満たす。この性質を一般化して二つの関数の連立微分方程式を構成し，その二つの関数の積で電力が得られるとして，その回路が無損失となる連立微分方程式とそれを解いて得られる無損失一般化波動関数を求めている。その無損失一般化波動関数を得る方程式は一般に二つの関数の連立微分方程式であることも示している。

本文は無損失一般化波動方程式の解である無損失一般化波動関数を求めることに重点をおいた。そのため，それらを回路素子として用いたときにどのような回路が得られるかは残された課題とする。

無損失一般化波動関数の特徴は左右に進む波に対する伝搬速度あるいは特性インピーダンスが異なる波動が得られた。その結果，集中定数回路では考えられない回路素子が得られる可能性があるが，これも残された課題である。なお，波動方程式は二つの関数が対となって連立微分方程式で表されるという特徴があり，力学の取り扱いとは異なることに注意すべきであろう。

また，本文の中の回路理論に関する詳しい取り扱いは文献[8]に述べていて，一部重複するところがあることを断っておく。

［参考文献］

[1] 太田浩一：電磁気学ⅠおよびⅡ，丸善，2000

[2] W.T. Reid：Riccati Differential Equations，ch.1，Academic Press，New York，1972.

[3] A.V. Efimov and V.P. Potapov：J-expanding matrix functions and their role in the analytical theory of electrical circuits，Usp. Mat. Nauk，pp. 65-130，1973.

[4] I.V. Lindell, A.H. Sihvola, S.A. Tretyakov and A.J. Viitanen : Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media, Artech House, Boston・London, 1994

[5] 安藤　毅：私信，2002年2月

[6] ミチオ・カク，ジェニファー・トンプソン (久志本克巳訳) ：アインシュタインを超える，ブルーバックス　B-1 164, 講談社　1997

[7] 島倉紀夫：アダマールの基本解とホイヘンスの原理，臨時別冊・数理科学　現代数学のあゆみ，pp.112-120,サイエンス社，1998.12

[8] 永井信夫：講義シリーズ　量子力学と信号処理，Journal of Signal Processing（信号処理)，vol.6,　no.1－5，2002年

[Abstract]

A Generalization of the Wave Equation Derived from Maxwell Equations : Considering with Circuit Theory

Nobuo NAGAI

In physics only one function satisfies the wave equation derived from mechanics. On the other hand, in electromagnetic theory electric and magnetic fields satisfy the same wave equation derived from Maxwell equations, which are composed of simultaneous differential equations of electric and magnetic fields. The Riccati differential equation is also derived from simultaneous differential equations. The ratio of the solutions for the simultaneous differential equations satisfies the Riccati differential equation. In applying this relation to Maxwell equations, the ratio of electric and magnetic fields defines "impedance", and the product of the two fields defines electric power or energy. In viewing Maxwell equations from energy, electric and magnetic fields compose a lossless circuit, and satisfy the law of conservation of energy. Generalizing these methods, this paper obtains generalized wave functions by defining new simultaneous partial differential equations, which satisfy the law of conservation of energy. The following properties are obtained from generalized wave functions : characteristic impedances for forward and backward waves are different, and propagation velocities for the waves are also different.