北星論集(経) 第 35 号 March 1998

企業の投資理論

―― 現代経済動態論(2) ――

酒 井 徹

目 次

1．前 提

1－1．企業の目的

株主の利益を長期的観点から追求する企業の投資行動をとりまく環境として，①市場価値を正確に評価する効率的金融市場の存在と②投資の調整費用の発生を前提とする。従って，金融市場の裁定条件から決まる株価は，前提により，最適投資決定により最大化される企業の市場価値と整合的である。その意味では効率的市場とは，分権的な計画(最適化)を反映したものである。さらに次の前提を追加する。③収益はすべて株主に配当される[(1)]。④投資の支出は期末になされる[(2)]。

1－2．株価と配当

上の前提①のもとで，一枚の株式を持っている投資家を考えよう。この投資家がt期に株式を保有せず,代わりに債券市場で資金運用するなら

次の期首には $(1+r)P_A(t)$ の粗収益を得ることができる。

一方，一枚の株式を購入・保有し，期末（いわゆる決算期）に収益が確定した直後つまり次期初に配当される。これを $\pi(t+1)$ と表す。株の一期間当たりのリターン（収益）は t 期初から $t+1$ 期にかけてこの株式を保有することによって得られる配当に，配当を受け取った後で売却する代金 $P_A(t+1)$ を合計した値となる。すなわち，

$$\pi(t+1)+P_A(t+1)$$

である。

株価は，投資家の金融資産間の「裁定取引」によって決まると考えられるから株価は次の等式を満たす。

資産市場の均衡条件

(1) $$(1+r)P_A(t)=\pi(t+1)+P_A(t+1)$$

これより，**株価の決定**

(2) $$P_A(t)=[\pi(t+1)+\Delta P_A(t)]/r$$

但し，$\Delta P_A(t)=P_A(t+1)-P_A(t)$

を得る。上の式が裁定条件による株価の決定式である。株価が π, r および ΔP_A といった「基本的諸要因（ファンダメンタルズ）」によって決まっている。

(1) 式をすべての期間について書き並べてみる。$\pi(t)$ は t 期での一株当たり配当を表し，毎期変化するものであるから，一般的には，

(3) $$\pi=\pi(t)$$

と書かれよう。【*NOTE 1*】で見るように，

(4) $$\lim_{T\to\infty} P_A(t+T)/(1+r)^{T-1}=0$$ （“横断性の条件”）

が成り立つと想定する。この時，株価は

(5) $$P_A(t)=\sum_{s=1}^{\infty}\pi(t+s)/(1+r)^{s}$$

と求まる。かくして，効率的な金融市場において株価は（一株当たり）配当の割引現在価値に等しいことが証明された。言い換えるならば，株式の総市場価値すなわち企業の市場価値は配当総額の割引現在価値に等しい。このことは後述するように，株価決定式(2)が(35)式すなわち，

$$V(t)=[NCF(t)+\Delta V(t+1)]/r$$

と整合的であることを意味する。また，株式発行枚数を適当に定義することによって，両式は同値となる。

2．企業の投資行動

2－1．調整費用

企業の投資活動を投資財の購入に限定することは「活動」を狭く限定することとなる。我々は「調整費用」アプローチを採用することによって，より動学的な投資活動を扱うものである。

投資の調整費用を含む t 期の投資のための支出 Ψ を

(6) $\quad \Psi(I)=P_{w}I+P_{w}\beta I^{2}$

と特定化する。第二項は投資の調整費用である（図１）。P_{w} は投資財価格，I は各期の投資量，β は正の定数である。

企業は資本ストックの初期値と，資本蓄積の状態を支配する次式

(7) $\quad K(t+1)-K(t)=I(t)$

を制約条件としつつ，企業の市場価値

(8) $\quad V(t)=\sum_{s=0}^{\infty}\dfrac{\theta(t+s)-\Psi(I(t+s))}{(1+r)^{1+s}}$

を最大化する。ここで利潤 θ は

$$\theta(t+s)\equiv P(t+s)F[K(t+s),L(t+s)]-w(t+s)L(t+s)$$

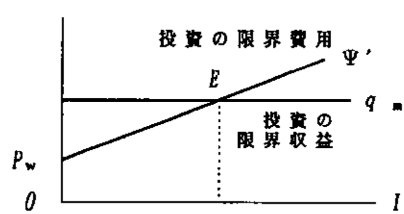
と定義される。また，労働雇用量 $L(t+s)$ は条件式

$$F_{L}[K(t+s),L(t+s)]=w(t+s)/P(t+s)$$

を満足していなければならない。

図１　投資の調整費用

図２　投資の決定



最大化の必要条件はこの時，$\theta'=\rho$ と定義すれば，

(9)　$q_m(t+1)-q_m(t)=rq_m(t)-\rho(t+1)$

(10)　$q_m(t)=\Psi'[I(t)]$

となる（【*NOTE 2*】参照）。これより明らかに，投資の意思決定は，今期の q_m を通じて，将来の ρ に依存する。

さらに，(6)のように特定化する時，(10)式は書き改められる。

(11)　$\dfrac{q_m(t)}{P_w}=1+2\beta I(t)$

従って，図2より明らかなように，

(12)　$\dfrac{q_m(t)}{P_w}\geqq 1 \Leftrightarrow I(t)\geqq 0$

ここで q_m は投資の帰属価値であるが，その値は，(9)式を書き変えて，

(13)　$q_m(t)=\sum_{s=1}^{\infty}\rho(t+s)/(1+r)^s$

と求まる（前章の株価と配当における式の導出プロセスを応用すればよい）。

以上の考察から得られる投資関数のイメージを表1に要約する。但し，上の(13)式における資本の限界生産物価値 ρ すなわち PF_K については，

(14)　$\rho(t+s)=\rho(t)=\rho$：一定（$s=1,2,\cdots\cdots$）

即ち，$\theta''=0$ となる特殊なケースもとりあげている。この時に，$q_m(t)=\rho/r$ であるから(12)式は書き改められる。

(12)′　$\rho/rP_w\geqq 1 \Leftrightarrow I(t)\geqq 0$

表1　投資関数のイメージ

一般的ケース	特殊ケース
$I(t)=I[\underset{+}{\rho(t)},\ \underset{-}{r(t)},\ \underset{-}{P_w(t)}]$ $I(t)=\phi[q_m(t)/P_w(t)-1]$ 但し $q_m(t)$ $=\sum_{s=1}^{\infty}\rho(t+s)/(1+r)^s$	$I(t)=\phi[q_m-1]$ 但し $q_m=\rho/r\ \ P_w$

特殊ケース

特殊なケースについて，やや付言が必要と思われる。いま，企業が全く投資をしない状況（K：一定）を考えてみよう。簡単化のため生産物価格 P は一定であるものとするから，t 期で一定の K の生み出す資本の限界価値生産物 PF_K すなわち ρ も一定となる。⒁式に見る特殊なケースが無理なく成立するのは，投資がゼロの場合かあるいは規模に対する収穫不変なのである。前者のケースでは，

① 株主が一枚の株式について受け取る配当 $\pi(t)$ は一定となり，

② 将来の配当が永遠に不変であれば株価も不変となる。

③ かくして，投資をしない状況ではキャピタル・ゲインは発生せず，株式保有からの収益は一定の配当のみとなる。

この時，資産市場の均衡条件⑴式は

⒂ $$P_A(t)=P_A(t+1)=P_A$$

と変わる。株価はこの時，

⒃ $$P_A=\rho/r$$

となる。株価を投資財価格で割った実質株価 q を求めると，

⒄ $$q=P_A/P_w=\rho/rP_w$$

を得る。これは，以下で扱う「トービンの平均 q」に他ならない。

2－2．q 投資関数

トービンの平均 q の定義によれば，

⒅ $$q(t)=\frac{\text{株式市場における企業の市場価値}}{\text{資本ストックの再取得価額}}=\frac{V(t)}{P_wK(t)}$$

である。すなわち，$q(t)$ は t 時点において現存する資本ストック全体の価値に対する株価総額の比率である。また，$V(t)$ は t 期以後のすべての期間において投資 $I(t)=0$ として求められている。すなわち，

⒆ $$V(t)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\theta(t+s)-\Psi(0)}{(1+r)^{1+s}}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\theta(t)}{(1+r)^{1+s}}$$

それ故，t 時点での平均 q の大きさは，$\theta(t)=\rho(t)K(t)$ である限り，

⒇ $$q(t)=\frac{\theta(t)}{rP_wK(t)}=\frac{\rho(t)}{rP_w}$$

と計算される。

投資を行わないことが最適である時の条件式は(11)式より，

(21) $q_m(t)=P_w[1+2\beta\cdot 0)]=P_w$

また，$\rho(t+s)=\rho(t)$：一定となることを考慮すれば，投資の帰属価値は(13)式から，

(13)′ $q_m(t)=\rho(t)/r$

となる。

かくして，この場合には，投資 $I(t)=0$ に対応する条件式(21)は，

(21)′ $\dfrac{\rho(t)}{rP_w}=1$

となる。ここで，平均 q を表す(20)式より，上式の左辺は $q(t)$ となる。つまり，平均 $q=1$ のとき投資は 0 となる。但し，このことは q 投資関数 $I(t)=\phi[q(t)-1]$ の一部分，すなわち $I(t)=0$ に対応する説明にすぎない。

一般的ケース

企業利益の一部を毎期の投資に向ける一般的ケースにおいては，ρ は毎期変化すると考える方が自然である。このケースは投資 $I(t)$ が毎期行われるケースに他ならない。この場合には，

① 株主が毎期受け取る配当総額は変化する。

② 一枚の株式の配当 $\pi(t)$ すなわち「$NCF(t)$/株式枚数」も毎期変化するので，

③ 将来の株価の変化（キャピタル・ゲイン）が生ずる。

一回限りの投資計画（一財モデル）

やや簡単な q 投資関数を一財モデルを用いて導出しよう。

今期を0期，来期を1期とする。投資を1回だけ，しかも今期の期末に行うものとする。配当は毎期末に行われるとする。この時，企業の最大化問題を次のように定式化して解く。$V(t)$ を投資がなされた後の企業価値（ないし株価×株式枚数）とし，さらに $\rho(t)K(t)$ で t 期の利潤を表すものとする。

この時，毎期の利潤は $\rho(t+s)(K_0+\varDelta K)$ と単純に表される。K_0 は t 期首に現存する資本ストックである。また $\varDelta K=I(t)$ である。

(22)
$$V(t)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{NCF(t+s)}{(1+r)^{1+s}}$$
$$=\frac{\rho(t)K_0-\Psi(\varDelta K)}{1+r}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\rho(t+s)(K_0+\varDelta K)}{(1+r)^{1+s}}$$
$$=\frac{\rho(t)K_0-\Psi(\varDelta K)}{1+r}+\frac{\rho(t+1)(K_0+\varDelta K)}{r(1+r)}$$

企業はこの $V(t)$ を最大化するような投資 $\varDelta K$ を選ばなければならない。最大化の条件は,

(23)
$$\frac{\rho(t+1)}{r}-\Psi'(\varDelta K)=0$$

である。ここで，投資に必要な支出をこれまでのように特定化する。

(6)′ $\Psi(\varDelta K)=P_w\varDelta K+P_w\beta(\varDelta K)^2$

この時，最大化の条件は,

(24)
$$\frac{\rho(t+1)}{r}=P_w[1+2\beta\varDelta K]$$

であるから，投資関数は

(25)
$$I(t)=[q^*(t)-1]/2\beta \quad 但し,\ q^*(t)=\frac{\rho(t+1)}{rP_w}$$

と求まる。トービンの平均概念の q と資本ストックの増分に対応する限界概念の q^* との相違は ρ を評価する期に一期のズレが生ずることによる。さらに，1財モデル（$P=P_w$）の想定に立てば，最大化の条件は次のように表すことができる。

$$\frac{F_K(t+1)}{r}=1+2\beta\varDelta K$$

この場合には,

(26)
$$I(t)=[q_m(t)-1]/2\beta \quad 但し,\ q_m(t)=\frac{F_K(t+1)}{r}$$

となる。q_m も限界概念である。

トービンの平均 q の定義を再び書くならば,

$$q(t)=V(t)/P_wK(t)=P_A(t)E(t)/P_wK(t)=P_A(t)/P_w$$

であるが，1財モデルでは $P=P_w$ であるから,

$$q(t)=P_A(t)/P_w=[PF_K(t)/r]/P_w=F_K(t)/r$$

となる。明らかに，1財モデルのにおいても平均 q と限界 q_m は同一ではない。

かくして，投資が1回だけ行われるケースでは，(25)または(26)式より投資関数

(27) $\quad I(t)=\phi$(限界 $q-1$)

となる。限界 q は，投資決定後に得られる収益の追加を反映しており，限界 q が上昇するほど投資 I が増加することを(27)式によって理解することができるのであるが，限界 q の上昇と平均概念の q の上昇とはは同じではないことに注意する必要がある。これまで見てきたように，平均 q の定義，すなわち，

(18) $$q(t)=\frac{V(t)}{P_w K(t)}$$

は現存する資本ストック全体の価値に対する株価総額の比率であった。さて，通常投資行動としてわれわれが想定しているのは，企業をそっくり買い取るという企業買収ではなく，追加的な資本ストックの蓄積であるから，q 理論でも「限界的な q の概念」（＝追加的な投資による企業価値の上昇/投資コスト）に対応して考えなければならない。

2－3．ケインズの投資理論

ケインズの投資理論を q 理論の角度から要約する。新規投資からの収益率（投資の限界効率）を m とする。これは，投資から生ずると予想されるネット・キャッシュ・フローの割引現在価値を，投資額と均等ならしめる割引率と定義される。第 t 期に投資された資本財の収益が T 期間にわたって発生する場合には，m は次の公式によって定義される。

(28) $$P_w I(t)=\sum_{s=1}^{T} \Delta NCF(t+s)/(1+m)^s$$

一回限りの投資計画であるから，第 t 期(末)に行われた投資により増大する第 $t+1$ 期以後の資本ストックは一定となる。従って，第 $t+2$ 期以後の将来ネット・キャッシュ・フロー $\Delta NCF(t+s)$，$s=2, 3, \cdots\cdots$，は一定となり，$\Delta NCF(t+1)$ に等しい。

新規投資からの将来ネット・キャッシュ・フロー $\Delta NCF(t+s)$，$s=1, 2, \cdots$，T は毎期変わらないので，充分大きな T について，一回限り

の投資計画に関する「投資の限界効率」

(29)　$m=\varDelta NCF(t+1)/P_w I(t)$

が求まる。ケインズの投資理論は「投資の限界効率」m が利子率 r を上回るとき投資が行われ，$m=r$ となると投資が止むとされる。すなわち，

(30)　$I(t)\geqq 0 \Leftrightarrow m \geqq r$

このことは，つぎの投資関数をイメージさせるものである。

(31)　$I(t)=\phi(Q(t)-1)$　但し $Q(t)=m/r$

ここで，

$$m=\frac{\rho(t+1)I(t)}{P_w I(t)}=\frac{\rho(t+1)}{P_w}$$

ゆえに(30)式より，

$$I(t)\geqq 0 \Leftrightarrow \frac{\rho(t+1)}{P_w}\geqq 1$$

ここで，Q すなわち m/r は財がどれだけ企業価値を増大させるかというその限界的貢献 $\rho(t+1)I(t)/r$ を再生産費用 $P_w I(t)$ で割ったものに他ならないから，「限界 q」と呼ぶべきものである。すなわち，

(32)　限界 q＝投資の限界効率÷利子率

かくして，ケインズの投資理論を q 理論の角度から要約すると，再び(27)式と同様に，

(33)　$I(t)=\phi$(限界 $q-1$)　但し，限界 $q=\rho(t+1)/rP_w$

となる。

3．最適投資経路

3－1．一財モデル

毎期行われる投資計画を改めてとりあげよう。前章の(9)または(13)式，および(10)または(11)式を想起すると，最適投資計画の条件式における q_m は投資の限界収益を表す変数であり平均概念の q ではない。その値は(13)式で示されている。従って，この場合の限界 q は

(34)　限界 $q=q_m(t)/P_w=(1/P_w)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\rho(t+s)}{(1+r)^s}$

となる。以下，これを確かめよう。

【*NOTE 3*】で見るように，次の関係式が成立しなければならない。

(35) $V(t)=\dfrac{\theta[K(t)]-\Psi[I(t)]}{1+r}+\dfrac{V(t+1)}{1+r}$

そこで，$V(t)$ を $I(t)$ に関して最大化すると，$t=1,2,\cdots\cdots$について，

(36) $\Delta V(t)/\Delta I(t)=0\Leftrightarrow\Psi'[I(t)]=\Delta V(t+1)/\Delta I(t)$

となる。従って，最大化の必要条件(10)式より，$t=1,2,\cdots\cdots$について，

(37) $q_{m}(t)=\Delta V(t+1)/\Delta I(t)$

が導出される。さらに，【*NOTE 4*】で見るように，

(38) $$\Delta V(t+1)/\Delta I(t)=\frac{\rho(t+1)}{1+r}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\rho(t+1+s)}{(1+r)^{1+s}}$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\rho(t+1+s)}{(1+r)^{1+s}}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\rho(t+s)}{(1+r)^{s}}$$

を得る。かくして，(34)式の成立が証明された。

次に，一財マクロ・モデルで投資関数の導出をしよう。P_{w} は投資財価格であるが1財モデルでは $P=P_{w}$ となる。よって，投資の調整費用を含む t 期の投資のための支出 Ψ は生産物で測って

(39) $\Psi[I(t)]=I(t)+\beta I(t)^{2}$

と特定化される。これは，投資の調整費用が"一国レベルに統合された"企業の内部費用として発生することを意味する。すなわち，一国の産出価値が投資活動によって非線型的に減少する，と言い換えて良い。

株主に対しては，次式で与えられる $NCF(t)/P(t)$ が実質配当として分配される。実質賃金率を ω で表すものとし，

(40) $NCF(t)/P(t)=F[K(t),L(t)]-\Psi[I(t)]-\omega(t)L(t)$

期待インフレ率を μ とする。生産企業は μ を一定と考えているとする。

$1+\mu=P(t+1)/P(t)$

期待実質収益率を α で表すと

$$1+\alpha(t)=\frac{1+r(t)}{1+\mu}$$

となる（$\alpha\mu\fallingdotseq 0$ と考えるならば $\alpha=r-\mu$ となる)。

簡単化のため期待名目収益率すなわち名目利子率 r は一定としているので α も一定となる。実質賃金率 ω も一定と仮定する。

企業の実質市場価値 $v(t)=V(t)/P(t)$ はこの時，

(41) $$v(t)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{F[K(t+s),L(t+s)]-\Psi[I(t+s)]-\omega L(t+s)}{(1+\alpha)^{1+s}}$$

最大化の必要条件はこの時，

(42) $$q_{\mathrm{m}}(t+1)-q_{\mathrm{m}}(t)=\alpha q_{\mathrm{m}}(t)-F_{\mathrm{K}}(t+1)$$

(43) $$q_{\mathrm{m}}(t)=\Psi'[I(t)]=1+2\beta I(t)$$

ここで q_{m} は投資の帰属価値すなわち，資本１単位の増加がもらす貢献すなわち資本の限界生産物 F_{K} が永続的にもたらす価値は，１財モデルにおいては(42)式より，

(44) $$q_{\mathrm{m}}(t)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{F_{\mathrm{K}}(t+s)}{(1+\alpha)^{s}}$$

である。

かくして，毎期行われる投資の帰属価値と投資の限界費用の均等条件

(45) $$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{F_{\mathrm{K}}(t+s)}{(1+\alpha)^{s}}=1+2\beta I(t)$$

を得る。また，

(46) $$\text{限界 } q(t)=q_{\mathrm{m}}(t)/P(t)=\frac{1}{P(t)}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{F_{\mathrm{K}}(t+s)}{(1+\alpha)^{s}}$$

となることが判明する。

３－２．規模に関する収穫不変のケース

投資の内部費用を分離した産出量が，コブ＝ダグラス型生産関数

$$F(N,K)=K^{j}L^{1-j},\ 0<j<1$$

で表されるならば，この時に限り，

$$F_{\mathrm{K}}=j(L/K)^{1-j},\ F_{\mathrm{L}}=(1-j)(L/K)^{-j}=\omega$$

従って，

(47) $$F_{\mathrm{K}}=const.$$

となる。(47)を投資計画における最適決定の必要条件(42)式に代入し，(43)式を考慮すると，

(48) $$I(t+1)-(1+\alpha)I(t)+B=0$$

但し，$B=[F_{\mathrm{K}}-\alpha]/2\beta$ とおいている。

投資の長期定常点を考え，$I(t)=I(t+1)=\cdots\cdots=I^{*}$ として，上の式

に代入すると，$I^*=B/\alpha$ を得る。そこで，投資の長期定常点からの乖離に関して，上の条件式を書き直すと，

$$I(t+1)-I^*=(1+\alpha)[I(t)-I^*]$$

言うまでもなく，$0<1+\alpha$ であるから，初期の投資量が投資の長期定常水準から僅かに乖離してスタートすると，その乖離は時間の経過と共に拡大する。即ち，最適決定ルールと整合する投資 $I(t)$ の時間経路は三つのタイプがある。すなわち，$+\infty$ に向かうか，$-\infty$ に向かうか，それとも常に I^* であり続けるかである。他方，長期定常点において，$I^*=B/\alpha$ はある有限の値をとらなければならない。かくして，これらの用件を同時に満足するためには，企業はいかなる期間においても $I(t)=I^*$ とする決定をしなければならない。かくして，次の投資関数を得る。

(49)　$I=[(F_K/\alpha)-1]/2\beta$

トービンの q の定義を利用すれば，$q=F_K/\alpha$ より，

(50)　$I=\dfrac{1}{2\beta}[q-1]$

と書くことができる。

3－3．一般的ケース

投資量 I は資本の限界生産物 F_K に依存して決まることが分かっているが，F_K はまた雇用水準の増大とともに増加するのが一般的である。同様に資本の限界生産物価値 PF_K すなわち ρ についても，

(14)　$\rho(t+s)=\rho(t)$：一定 $(s=1,2,\cdots\cdots)$

となるケースはすでに言及したように一般的ではない。すなわち，

(51)　$F_{KL}>0$

を考えなければならない。従って，投資量は産出量 Y が大きいほど大きくなることが想像される。以下では，この点を明らかにしよう。

生産関数を $Y=F(K,L)$，投資関数を $I=[F_K/\alpha-1]/2\beta$ と想定しつつ，いま $dK=0$ とおいて，次の二式をもとめる。

$$dY=F_L dL,$$

$$dI=\frac{1}{2\beta}\frac{F_{KL}}{\alpha}dL-\frac{F_K}{2\beta\alpha^2}d\alpha$$

dL について求めたものを代入して，

$$dI=\frac{1}{2\beta}\frac{F_{KL}}{\alpha F_L}dY-\frac{F_K}{2\beta\alpha^2}d\alpha$$

を得る。従って，変数 I，Y，α の間には次のような関数関係

(51)　$I=I(Y,\alpha)$

がある。ここで，この投資関数の微係数は

$$\partial I/\partial Y=\frac{1}{2\beta}\frac{F_{KL}}{\alpha F_L}>0$$

$$\partial I/\partial\alpha=-\frac{F_K}{2\beta\alpha^2}<0$$

である。

3－4．長期定常水準への収束

最大化の必要条件より（【*NOTE 5*】参照），

$$\Psi'[I(t+1)]-(1+\alpha)\Psi'[I(t)]+F_K(t+1)=0$$

において，Ψ を特定化し $L(t+1)=-F_{LK}K(t+1)/F_{LL}$ を代入すれば，

(52)　$$K(t+2)-\left[2+\alpha-\frac{detH}{2\beta F_{LL}}\right]K(t+1)+(1+\alpha)K(t)=0$$

但し，

$$detH=\begin{vmatrix}F_{KK} & F_{KL}\\ F_{LK} & F_{LL}\end{vmatrix}>0,$$

$$F_K,F_L>0\quad F_{KK},F_{LL}<0.$$

いま長期定常点の近傍で線型近似体系を作り，その体系を表す差分方程式の特性方程式を

(53)　$$x^2-\left[2+\alpha-\frac{detH}{2\beta F_{LL}}\right]x+(1+\alpha)=0$$

とする。あるいは，

(54)　$x^2-Bx+C=0$

と表す。長期定常点に単調の収束するためには，$0<x<1$ でなければいけない。そのための条件は，

(i)　$B^2-4C\geqq 0$

(ii)　$0<B\pm[B^2-4C]^{0.5}<2$

がともに成り立つことである。

もし，$detH \geqq 0$ ならば(i)は成立する。しかし，$detH=0$ の時，$B=2+\alpha$ であるから，$B^2-4C=\alpha^2$ となり，(ii)は成立しない。かくして，

$$detH>0$$

の時，すなわち規模に関する収穫逓減のケースに限り，資本トックの長期定常水準に収束することができる[(3)]（【*NOTE 6*】)。

なお，この時の資本トックの調整は次の式で表される（【*NOTE 7*】)。

$$K(t+1)-K(t)=\varepsilon[K(t)-K^*],\ \varepsilon<0$$

この式は，「伸縮的加速子」(flexible accelerator) として知られているストック調整の一類型である。

【*NOTE 1*】

株価決定式を書き変え，各期について求めると，

$$-P_A(t+1)+(1+r)P_A(t)=\pi(t+1)$$
$$-P_A(t+2)/(1+r)+P_A(t+1)=\pi(t+2)/(1+r)$$
$$-P_A(t+3)/(1+r)^2+P_A(t+2)/(1+r)=\pi(t+3)/(1+r)^2$$
$$-P_A(t+4)/(1+r)^3+P_A(t+3)/(1+r)^2=\pi(t+4)/(1+r)^3$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$-P_A(t+T)/(1+r)^{T-1}+P_A(t+T-1)/(1+r)^{T-2}=\pi(t+T)/(1+r)^{T-1}$$

辺々をたし合わせると

$$(1+r)P_A(t)-P_A(t+T)/(1+r)^{T-1}=\sum_{s=1}^{T}\pi(t+s)/(1+r)^{S-1}$$

ここで，T を無限大（∞）にとる。

[1] $\lim_{T\to\infty} P_A(t+T)/(1+r)^{T-1}=0$ (〝横断性の条件〞)

が成り立つと想定する。この時，株価は次式で表される。

[2] $P_A(t)=\sum_{S=1}^{\infty}\pi(t+s)/(1+r)^{s}$

【*NOTE 2*】

毎期における生産要素投入の組み合わせに関する決定は，

[3]　$F_L(K, L) = w/P$

を満足しなければならない。ここで，w は名目賃金率，P は代表的企業の生産物価格である。この決定により，利潤 θ は

[4]　$\theta(K) = PF(K, L) - wL$

と表すことができる。以下では，t 期以後の w，P の期待値が完全に知られているものと想定する。この時，資本の限界生産物価値 $\theta'(K)$ は

[5]　$\theta'(K) = PF_K$

と定義される。我々は規模に関する収穫逓減のケースにのみ限定することなく，一般的ケースを考えるものであるから，

[6]　$\theta'(K) = P\ detH/F_{LL}$

となる。

投資が第 t 期にスタートし，それ以降のすべての期間にわたって継続するケースを考え，次の最大化問題を解く。

[7]　$max V(t)$

$$= max \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\theta[K(t+s)] - P_w[I(t+s) + \beta I(t+s)^2]}{(1+r)^{1+s}}$$

[8]　制約条件：$K(t) = K_t$：所与

$$K(t+s) - K(t+s-1) = I(t+s-1),\ s = 1, 2, \cdots\cdots$$

以下，ラグランジェ未定乗数法で解くプロセスを以下で示す。未定乗数 $q_m(t+1)$，$q_m(t+2)$，……，は投資の限界収益の価値（投資の帰属価値）を表すが，その意味については【*NOTE 4*】で，また関連する命題については【*NOTE 3*】で扱う。さて，次の関数

[9]
$$J(I, K) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^{1+s}} \Big[\theta[K(t+s)] - P_w\{I(t+s) + \beta I(t+s)^2\} + q_m(t+s)\{I(t+s) + K(t+s) - K(t+s+1)\} \Big]$$

を考える。t 期の決定に関係する部分を特に取り出して書き改めれば，

$$J(I, K) = \frac{\theta[K(t)] - P_w\{I(t) + \beta I(t)^2\}}{(1+r)} + \frac{\theta[K(t+1)] - P_w\{I(t+1) + \beta I(t+1)^2\}}{(1+r)^2}$$

$$+\frac{q_m(t)[I(t)+K(t)-K(t+1)]}{(1+r)}$$

$$+\frac{q_m(t+1)[I(t+1)+K(t+1)-K(t+2)]}{(1+r)^2}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$K(t+1)$ と $I(t)$ について微分してゼロとおくと，次の２本の条件を得る。

$$K(t+1) \Rightarrow \frac{\theta'[K(t+1)]}{(1+r)^2} - \frac{q_m(t)}{(1+r)} + \frac{q_m(t+1)}{(1+r)^2} = 0$$

$$I(t) \Rightarrow -\frac{P_w[1+2\beta I(t)]}{(1+r)} + \frac{q_m(t)}{(1+r)} = 0$$

最大化の必要条件はこの時，$\theta'[K(t+1)]=\rho(t+1)$ と定義すると，

[10]　　$q_m(t+1)-q_m(t)=rq_m(t)-\rho(t+1)$

[11]　　$q_m(t)=\Psi'[I(t)]$

これより，株価の決定(2)式 $P_A(t)=[\pi(t+1)+\Delta P_A(t)]/r$ と整合的な形に［10］を変形すると，

$$q_m(t)=[\rho(t+1)+\Delta q_m(t)]/r$$

となる。また，投資に必要な支出を特定化するなら［11］は，

[12]　　$\dfrac{q_m(t)}{P_w}=1+2\beta I(t)$

と表される。

【*NOTE 3*】

$$V(t)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\theta[K(t+s)]-\Psi[I(t+s)]}{(1+r)^{1+s}}$$

$$V(t+1)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\theta[K(t+1+s)]-\Psi[I(t+1+s)]}{(1+r)^{1+s}}$$

$$V(t)-\frac{V(t+1)}{1+r}=\frac{\theta[K(t)]-\Psi[I(t)]}{1+r}$$

かくして，

[13]　　$V(t)=\dfrac{\theta[K(t)]-\Psi[I(t)]}{1+r}+\dfrac{V(t+1)}{1+r}$

と書くことができる。

【*NOTE 4*】

(35)式が成立することを見るために,

(37)　$q_m(t) = \Delta V(t+1)/\Delta I(t) \quad t=1,2,\cdots\cdots$

の成立を証明する。

そこで【*NOTE 3*】より,

$$V(t+1) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\theta[K(t+1+s)] - \Psi[I(t+1+s)]}{(1+r)^{1+s}}$$

$$= \frac{\theta[K(t+1)] - \Psi[I(t+1)]}{1+r}$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\theta[K(t+1+s)] - \Psi[I(t+1+s)]}{(1+r)^{1+s}}$$

$$= \frac{\theta[K(t)+I(t)] - \Psi[I(t+1)]}{1+r}$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\theta[K(t)+I(t)+I(t+1)+\cdots+I(t+s)] - \Psi[I(t+1+s)]}{(1+r)^{1+s}}$$

であるから,

$$\Delta V(t+1)/\Delta I(t) = \frac{\theta'[K(t+1)]}{1+r} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\theta'[K(t+1+s)]}{(1+r)^{1+s}}$$

$$= \frac{\rho(t+1)}{1+r} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\rho(t+1+s)}{(1+r)^{1+s}}$$

かくして,

[14]　$\Delta V(t+1)/\Delta I(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\rho(t+1+s)}{(1+r)^{1+s}} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\rho(t+s)}{(1+r)^{s}}$

を得る。この時,

[15]　$q_m(t) = \Delta V(t+1)/\Delta I(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\rho(t+s)}{(1+r)^{s}}$

が成立するから,毎期行われる投資計画において,

[16]　限界 $q = q_m(t)/P_w = (1/P_w) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\rho(t+s)}{(1+r)^{s}}$

【*NOTE 5*】

[17] $$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{F_K(t+s)}{(1+\alpha)^s}=1+2\beta I(t)$$

より，次式を得る。

$$F_K(t+1)-(1+\alpha)[1+2\beta I(t)]+[1+2\beta I(t+1)]=0$$

これを整理して，

[18] $$K(t+2)-(2+\alpha)K(t+1)+(1+\alpha)K(t)-\frac{\alpha+F_K(t+1)}{2\beta}=0$$

長期定常点の近傍で線型近似体系を作ると，

$$[K(t+2)-K^*]-(2+\alpha)[K(t+1)-K^*]+(1+\alpha)[K(t)-K^*]$$
$$-\frac{F_{KK}[K(t+1)-K^*]+F_{KL}[L(t+1)-L^*]}{2\beta}=0$$

即ち，次式となる。

[19] $$[K(t+2)-K^*]-\frac{2\beta(2+\alpha)+F_{KK}}{2\beta}[K(t+1)-K^*]$$
$$+(1+\alpha)[K(t)-K^*]-\frac{F_{KL}[L(t+1)-L^*]}{2\beta}=0$$

【*NOTE 6*】

本文の議論の中で触れなかった点が二つある。それは，(i)利潤関数 θ と生産関数 F との関係，(ii)長期定常均衡への収束性と収穫の可変性，であるが，これらは互いに関連している（酒井〔1983〕)。

利潤 θ は生産関数 F と次のような関係がある。

$$\theta=PF(K,L)-wL$$

労働力 L は毎期ごとに選択され，最適条件 $PF_L(K,L)=w$ より資本ストックの大きさが変われば $dL/dK=-F_{LK}/F_{LL}$ に従って労働と資本ストックとの相対的変化が起きなければならない。このルールのもとで資本ストック変化の利潤への効果を求めると次のようになる。

[20] $$\theta'(K)=PF_K$$

[21] $$\theta''(K)=P[F_{KK}F_{LL}-F_{KL}F_{LK}]/F_{LL}$$
$$=P\cdot detH/F_{LL}$$

ヘッセ行列式（$detH$）の符号が資本ストックの変化と共に変わることを想定することは理にかなっている。酒井〔1983〕で扱ったように，規模に関する収穫逓増の領域において $detH<0\,(\theta''>0)$，規模に関する収穫不変の領域において $detH=0\,(\theta''=0)$，規模に関する収穫逓減の領域において $detH>0$（$\theta''<0$）となるであろう。

この仮定の重要性は資本蓄積の長期均衡の存在を保証するところにある。

【*NOTE 7*】

特性根のうち，収束性を持つものを x とすると，

$$K(t)-K^{*}=[K_0-K^{*}]x^{t}$$

$$K(t+1)-K^{*}=[K_0-K^{*}]x^{t+1}$$

より，次の式が得られる。

$$[22]\qquad K(t+1)-K(t)=[K_0-K^{*}]x^{t}(x-1)$$

$$=[K(t)-K^{*}]\varepsilon,\ \varepsilon=x-1<0$$

【*NOTE 8*】

一株当たり配当 ρ が固定されており，労働所得 wL の割引現在価値を最大化するモデルを提唱する。

$$max\,W=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{PF(K,L)-\rho K-\Psi(I)-\Phi(N)}{(1+r)^{1+s}}$$

$$s.t.\ K(t+1)-K(t)=I(t),\ L(t+1)-L(t)=N(t)-\delta L(t)$$

ここで，L は正社員の労働，N はその新規雇用，δ は退職率である。また，$\Phi(N)$ は雇用の調整費用である。

長期定常均衡の近傍での動きは，$K(t)$ に関する特性根 y と，$N(t)$ に関する特性根 x に関す方程式

$$y^{t}[Ay^{2}-By+C]-Dx^{t+1}=0$$

$$x^{t}[Ex^{2}-Fx+G]+Hy^{t+1}=0$$

を解くことにより求まる。

［注］

（1） 我が国の企業における配当政策は，米国型のそれと異なり，配当は

固定化し，利子化している。また，労働賃金も，短期における限界生産力説と乖離していると考えられ，むしろ，労働所得は固定的生産要素に帰属する準地代としての分配として扱うのが現実的と思われる。実務的には，人件費は固定費としての取扱が損益計算表に見られるのは周知のとおりである。

最近の日本的企業論では，正社員一人当り所得の最大化行動などの仮説が合理的であるとして支持される一方，新しいゲーム理論では限定合理性も重視されている。前者のような問題は【*NOTE 8*】で試論的に扱うものとする。

(2) 吉川〔1992〕は投資の支出は期初に行われるとしている。この場合投資の支出は一期分の割引を受ける。

(3) 消費者としての株主が所有するた資産のリターンを来期の消費の源泉として予測する「2期間消費モデル」を考えることは興味深い。Diamond［1965］は投資関数を捨象した動学的一般均衡モデルを用いて，資本蓄積の動学的非効率性命題を示した。Mutoh［1995］は類似の世代交代モデルに Uzawa [1969] タイプの調整費用を持ち込んで，同様の分析をしている。しかし，長期定常均衡の存在に不可欠の規模に対する収穫逓減のケースはこれらに共通して見られない。

［参考文献］

Diamond, P. A. [1965] "National Debt in a Neoclassical Growth Model", *American Economic Review, Vol.55, pp.1126-1150.*

Mutoh, T. [1995] "Overlapping Generations Model, Investment Function and Dynamic Efficiency of Resource Allocation", *The Japanese Economic Review, Vol.46, No.4, pp.358-366.*

酒井　徹［1974］「調整費用モデルの展望と問題点 ── 企業の投資理論(1) ──」，北海道大学『経済学研究』，第24号，*pp*.107-124.

Sakai, T. [1974] "Optimal Capital Adjustment: An Analysis Where Delivery Lag Enters Explicitly", *Hokudai Economic Papers, Vol.4, pp.46-54*.

酒井　徹［1983］「最適な資本蓄積経路について」，北星学園大学経済学部『北星論集』，第21号，*pp*.157-166.

Uzawa, H. [1969] "Time Preference and Penrose Effect in a Two-class Model of Economic Growth", *Journal of Political Economy, Vol. 77, pp.628-652.*

吉川　洋［1992］「第５章　投資」,『日本経済とマクロ経済学』, 東洋経済新報社, *pp*.211-243.